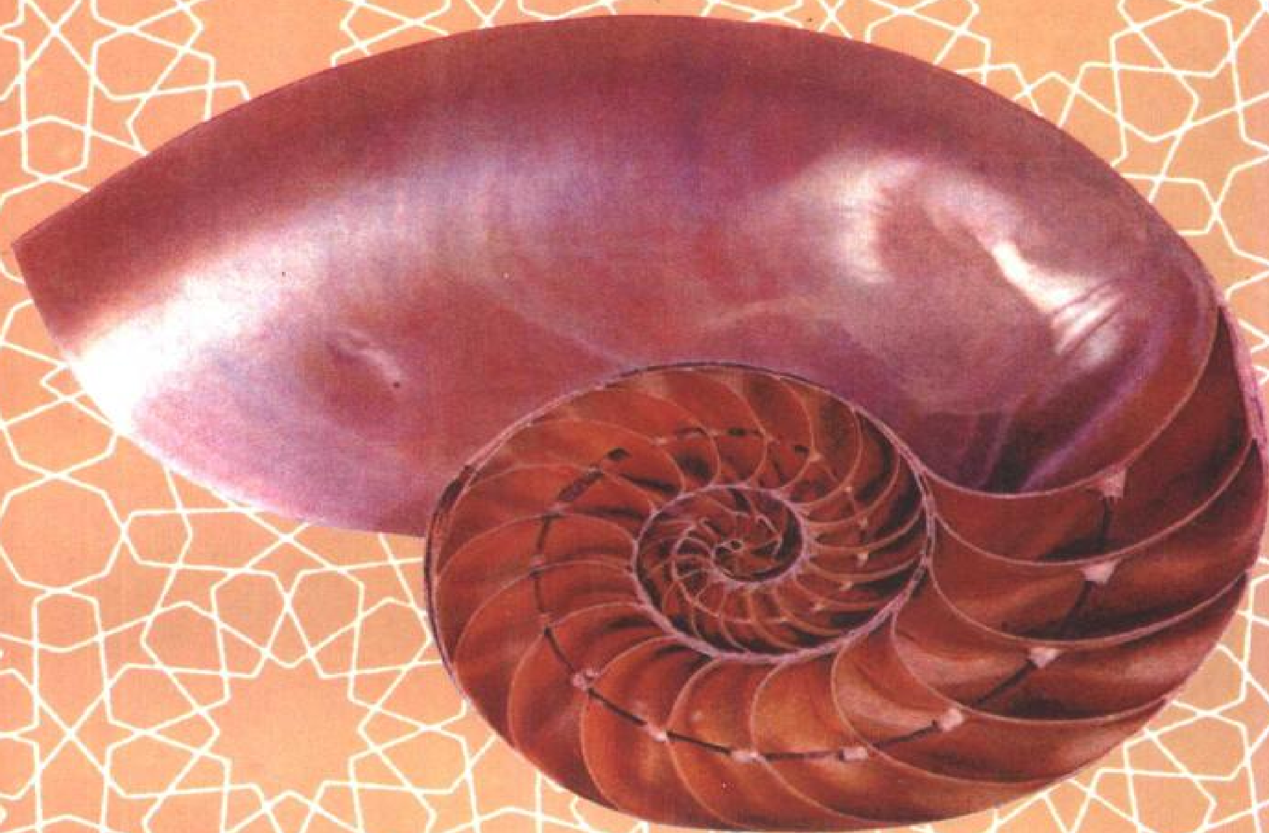
TONGSU SHUXUE MINGZHU YICONG



通俗数学名著译丛

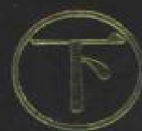
SHUXUE QUWEN JIJIN XIA

[美]T·帕帕斯 著

张远南 张昶 译

上海教育出版社






# 数学趣闻集锦

责任编辑　叶中豪
封面设计　赵文奎




# 数学趣闻集锦(下)

SHUXUE QUWEN JIJIN XIA



ISBN 7-5320-6052-7/G·6207
定　　价：(软精)15.30元

21 数学天元基金

本书得到国家自然科学基金
委员会数学天元基金的资助





# 数学趣闻集锦

## ——数学就在你周围（下）

［美］T·帕帕斯著　张远南　张昶译　•　上海教育出版社





**图书在版编目（CIP）数据**

数学趣闻集锦．下册／（美）帕帕斯著；张远南，张昶译．—上海：上海教育出版社，1998．12（2000．3重印）
（通俗数学名著译丛／史树中，李文林主编）
ISBN 7-5320-6052-7

Ⅰ．数…　Ⅱ．①帕…②张…③张…　Ⅲ．数学-普及读物　Ⅳ．01-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第15858号

*Theoni Pappas*

**More Joy of Mathematics**

Wide World Publishing



根据大世界出版社1996年10月第7次印本译出，
本书中文版权由上海市版权代理公司帮助取得

通俗数学名著译丛

**数学趣闻集锦（下）**

［美］T·帕帕斯　著

张远南　张　昶　译

上海世纪出版集团
上 海 教 育 出 版 社　出版发行

（上海永福路123号）

（邮政编码：200031）

各地新华书店经销　　上海市印刷三厂印刷

开本850×1156 1/32　印张12　插页4　字数286,000

1998年12月第1版　2000年3月第3次印刷

印数8251—12750本

ISBN 7-5320-6052-7/G·6207　　定价：（软精）15.30元

# 译丛序言

数学,这门古老而又常新的科学,正阔步迈向21世纪.

回顾即将过去的世纪,数学科学的巨大发展,比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位.数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透,并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献.同时,数学作为一种文化,已成为人类文明进步的标志.因此,对于当今社会每一个有文化的人士而言,不论他从事何种职业,都需要学习数学,了解数学和运用数学.现代社会对数学的这种需要,在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面,20世纪数学思想的深刻变革,已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路.面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法,门外汉往往只好望而却步.这样,提高数学的可接受度,就成为一种当务之急.尤其是当世纪转折之际,世界各国都十分重视并大力加强数学的普及工作,国际数学联盟(IMU)还专门将2000年定为"世界数学年",其主要宗旨就是"使数学及其对世界的意义被社会所了解,特别是被普通公众所了解".

一般说来,一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础,随着中国现代数学研究与教育的长足进步,数学普及工作在我国也受到重视.早在60年代,华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读物,激发了一代青少年学习数学的兴趣,影响绵延至今.改革开

放以来,我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力.但总体来说,我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距.我国数学要在下世纪初率先赶超世界先进水平,数学普及与传播方面的赶超乃是一个重要的环节和迫切的任务.为此,借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版,正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物,推动国内的数学普及与传播工作,为我国数学赶超世界先进水平的跨世纪工程贡献力量.丛书的选题计划,是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述,基本上都是在国外已广为流传、受到公众好评的佳作.它们在内容上包括了不同的种类,有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用;有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧;有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系;……等等,试图为人们提供全新的观察视角,以窥探现代数学的发展概貌,领略数学文化的丰富多采.

丛书的读者对象,力求定位于尽可能广泛的范围.为此丛书中适当纳入了不同层次的作品,以使包括大、中学生;大、中学教师;研究生;一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益.即使是对于专业数学工作者,本丛书的部分作品也是值得一读的.现代数学是一株分支众多的大树,一个数学家对于他所研究的专业以外的领域,也往往深有隔行如隔山之感,也需要涉猎其他分支的进展,了解数学不同分支的联系.

需要指出的是,由于种种原因,近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气,有关选题逐年减少,品种数量不断下降.在这样的情况下,上海教育出版社以迎接2000世界数学年为契机,按照国际版权公约,不惜耗资购买版权,组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》,这无疑是值得称道和支持的举措.参加本丛书翻译的专家学者们,自愿抽出宝贵的时间来进行这类通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益

工作,同样也是值得肯定与提倡的.

像这样集中地翻译、引进数学科普读物,在国内还不多见.我们热切希望广大数学工作者和科普工作者来关心、扶植这项工作,使《通俗数学名著译丛》出版成功.

让我们举手迎接2000世界数学年,让公众了解、喜爱数学,让数学走进千家万户!

《通俗数学名著译丛》编委会

1997年8月

“数学家不单单因为数学有用而研究数学；他研究它还因为他喜欢它，而他喜欢它则是因为它是美丽的！”

——H·庞加莱

主编：

史树中　李文林

编委：(按姓氏笔划)

叶其孝　任南衡

赵　斌　胡作玄

袁向东　谈祥柏

惠昌常

顾问：

龚　升　齐民友

# 目 录

# 海洋波浪的数学

大海的波浪，其壮丽的造型似乎是一种人性的创造．你见它时而隆起，时而翻滚，时而拍击着海岸，……多少世纪来，人们用复杂的数学方程来描述它们的性质和形态．为了了解和探索其数学的内涵，并用以解析那多变的形状、大小、构成和特性，让我们看看波的一般性形态是必要的．

观察两个人，他们的手各执一根绳子的两端，其中一个人通过手的上下起伏来产生波．想象波是沿着绳子传播的．开始时靠近另一个人那部分绳子没有动，但接着在两人之间便出现了能量的传递，波就是这样通过媒介传带能量的运动．在这种情况下，媒介则是一根绳子．媒介体还可以是水（海洋的波浪）、地球（地震的震波）、电磁场（无线电波）、空气（声波），等等．波是媒介体受到某种方式的扰乱和骚动而产生的．

海洋波浪的产生，或由于风，或由于地震，或由于某种物体（如船）的运动，或由于月球和太阳的引力（引起潮汐）等原因，而使水（媒介体）受到了扰动．海的波浪是在水的表面上传播的．只是当扰动出现复合时，它那起伏的形状多少有点随意性罢了．

许多对海洋波浪的数学方面的研究，出现在 19 世纪初．对大海的观察及实验室中的模拟控制实验，帮助了科学家们获得了有趣的结论．公元 1802 年，捷克斯洛伐克的 F·格特纳首先用公式建立了最初的波的理论．他通过观察了解了在一个波浪中的水分子是怎样在一个圆周上运动．在波峰上的水的运动方向，与在波谷的水的运动方向恰好相反．在水的表面上的每一个水分子，在它返回原先位置之前，都在一个圆形的轨道上运动．人们发现，这个圆的直径等于波高．有些圆是由深部的水分子产生的，但不那么深地方的水形成的圆较小．事实上，人们可以发现，深度为波长$\frac{1}{9}$的水，其圆形轨道的直径，差不多只有表面水分子 [2]

圆形轨道的一半.①

由于波浪与那些旋转的分子相联系,又由于正弦曲线和摆线也依赖于转动的圆,因而对海洋波浪的描述使用这些数学方程和曲线,也就不足为奇了.然而人们发现,海洋的波浪并非是严格的正弦曲线或其他单纯性的数学曲线.水的深度、风的强度、潮汐的变化等等,在描述海的波浪时都应加以考虑.今天,人们还用概率论和统计数学对海浪加以研究.通过对大量小波浪的观测,从中收集资料并形成公式以用于预测.

[3]

海洋波浪的其他一些有趣的性质是:

1) 波长依赖于周期.

2) 波高不依赖于周期和波长(个别情况例外,那就是周期和波长的影响十分精细).

---

① 原注:对于波的词义解释.




——波峰:波的最高点.

——波谷:波的最低点.

——波高:从波峰到波谷的垂直距离.

——波长:在两个相邻的波峰之间的水平距离.

——波的周期:波峰传播一个波长所用的时间(秒).

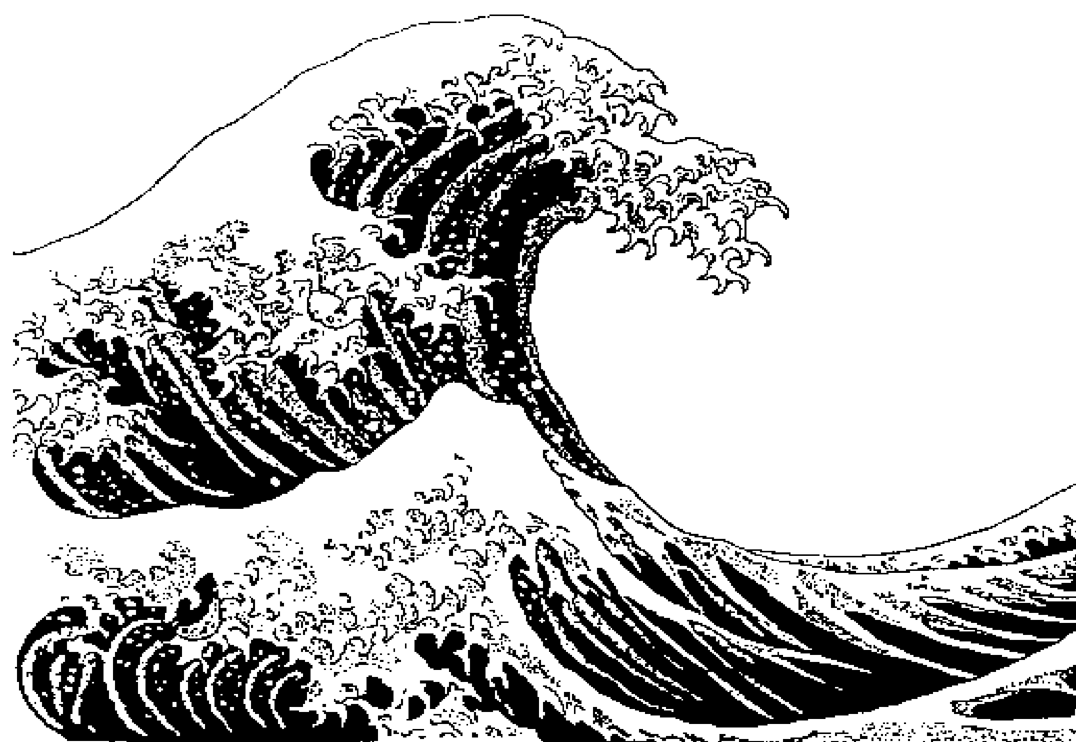
——正弦曲线:形如下图的曲线.



它是一个周期(有规律地重复它的形状)的三角函数.

——摆线:当一个圆沿一直线滚动时圆上的一个点所走过的路线(下图曲线).



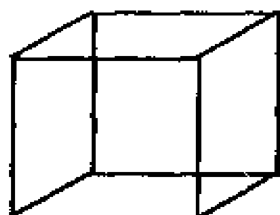


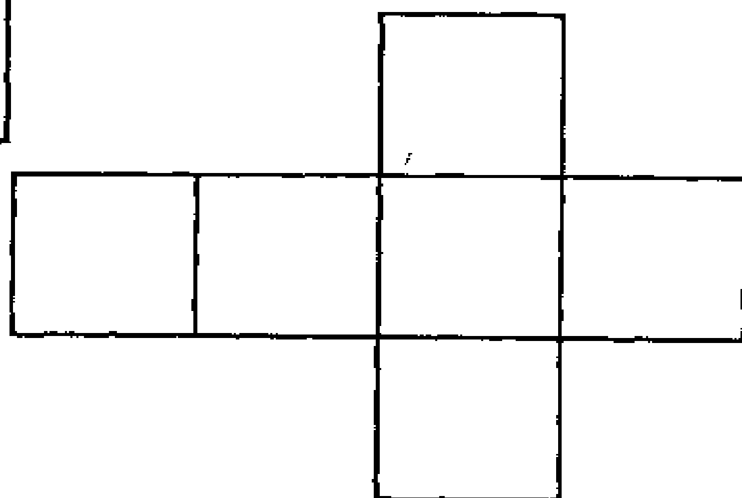
3) 当波峰的角超过 120°时,波便破坏了.当波破坏的时候其大部分的能量也随之损耗.

4) 对于波受破坏的另一种确定方法,就是比较它的波长与波高.当以上两者的比大于 7:1 时,波便破坏了. [4]

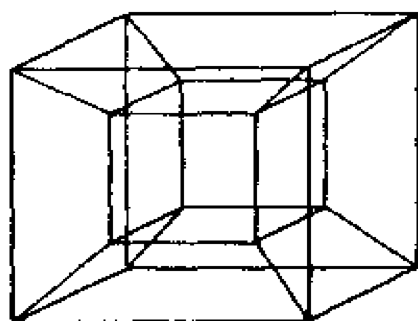
# 四维立方体的展开

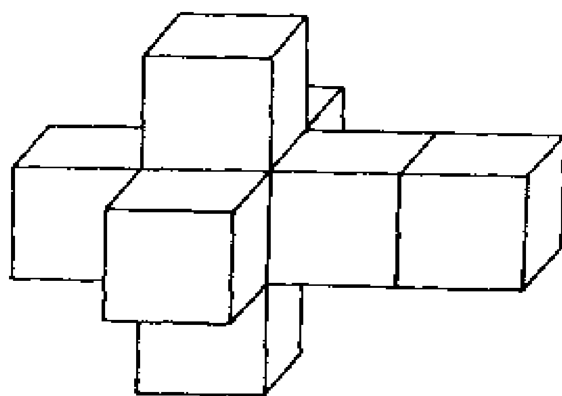
一个立方体画在一张纸上是一种想象的三维透视图.下图呈示了一种在二维平面上展开一个立方体的方法.





一个超立方体或一个立方镶嵌体是一种立方体的四维表示.现在我们应用一种类似的方法,把一个四维立方体在三维空间中加以展开.下图说明了一个超立方体或立方镶嵌体是由8个立方体,16个顶点,24个正方形和32条边所构成.

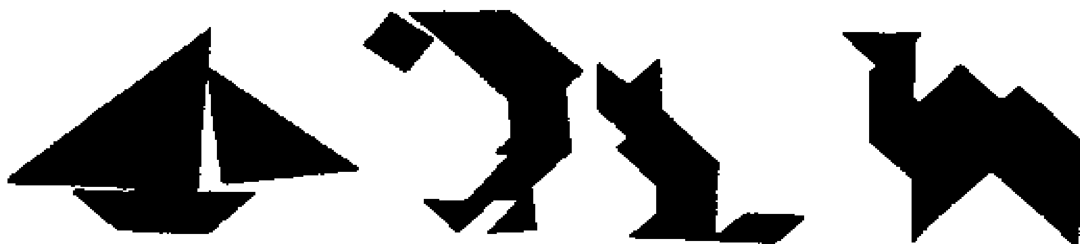




[5]

# 七　巧　板

19 世纪最流行的谜题之一就是中国的七巧板.七巧板的流行大概是由于它结构简单、操作容易、明白易懂的缘故.你可以用七巧板随意地拼出你自己设计的图样,但如果你想用七巧板拼出特定的图案,那就会遇到真正的挑战.因为它那简单的结构,很容易使人误认为要解决它的问题也很容易.用七巧板拼出的图案超过 1600 种,其中有些是容易解决的,另一些却相当诡秘,还有一些则似是而非充满了矛盾.



小船　　老人　　猫　　骆驼

谁能猜到七巧板居然会跟拿破仑、亚当、杜雷、爱伦坡以及卡洛尔等人发生关系? 而实际上他们全都是七巧板的狂热爱好者.

虽说七巧板是人们早期的一种娱乐内容,但最早提到七巧板的,是公元 1813 年的一本中国的书.该书约写于清朝嘉庆年间(1796—1820).

关于七巧板的名称有许多原始的说法:

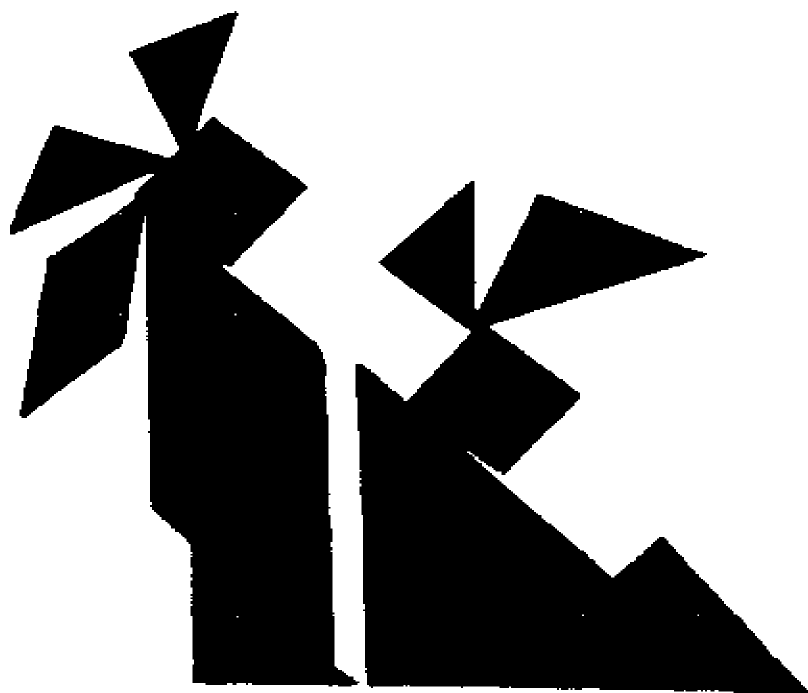
1) 来自被废弃的英语词"trangram",意即奇形怪状的小玩意儿;

2) 来自词 Tang(中国的唐朝)带后缀—gram(希腊文意为作品);

3) 来自术语"tanka",意即沿海船上人家.他们在运输摆渡中除了供应食物、浣洗衣物外,还提供一些娱乐方面的招待.其

中就有这种由七块板组成的中国谜题.大约七巧板一词(Tangram)就是从 tanka game(船上人家的游戏)演化来的.[6]

所有以上的说法似乎都有一定的道理.

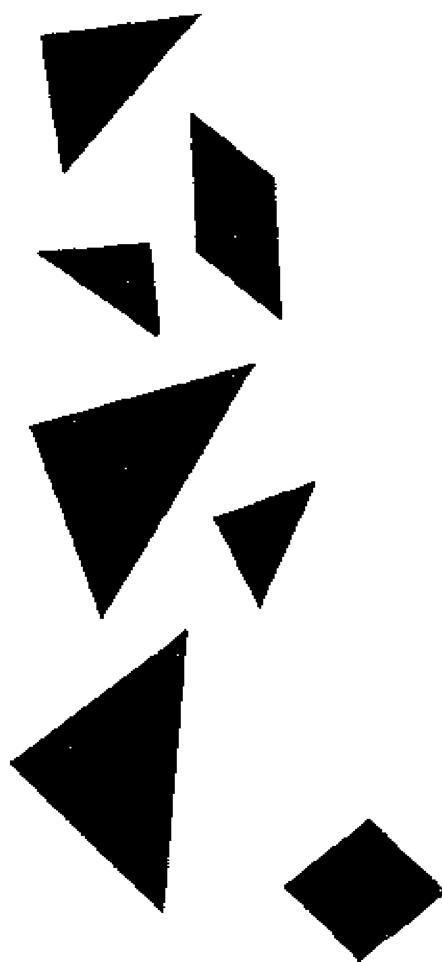


洛依德的印地安人

大概是原始七巧板的浓厚的趣味和它的娱乐释义,激发了美国著名谜题专家山姆·洛依德的文学创意.在《第八茶皮书》中可以看出,那时洛依德有一种令人惊异的意识,这种意识表现在除幽默和有趣之外,还朝实际玩乐方向靠近.他的那本书写于1903年,此时他已61岁高龄.至于为什么他写这本书等待了如此之久便不得而知,只晓得他母亲过世后他得到了两本祖传的有关七巧板的书①.在他的书的"历史"部分,他把这项游戏的发明归于上帝的赐给.他写道:

① 原注:约翰·辛格是画家J·S·萨金特的祖父,他给他女儿伊丽莎白·辛格·洛依德两本他收集的关于七巧板图案的书.而伊丽莎白过世后,这两本书便传到他儿子山姆·洛依德的手中.

"按百科全书的介绍,七巧板游戏渊源极为古老.在中国,它作为一种消遣性的玩物,其历史可以追溯到4000年前……在《第七茶皮书》中我们曾推测说明世界的创造、物种的起源是按照一种超达尔文的达尔文计划.人类的进化过程是通过七个发展阶段才达到神秘的精神境界.当然,这种说法对于严格的思考来说,可能过于出格……"



七巧板的七块

《第八茶皮书》是十分令人信服的.事实上有不少学生受骗,以致最初相信了他虚拟的历史,直至他们自己作了更加广泛的探索之后,才明白过来.虽然如此,洛依德那令人喜爱、使人欢乐的上乘的谜题书,将七巧板图形连同那流短飞长的评论,一并带到人们的生活中.

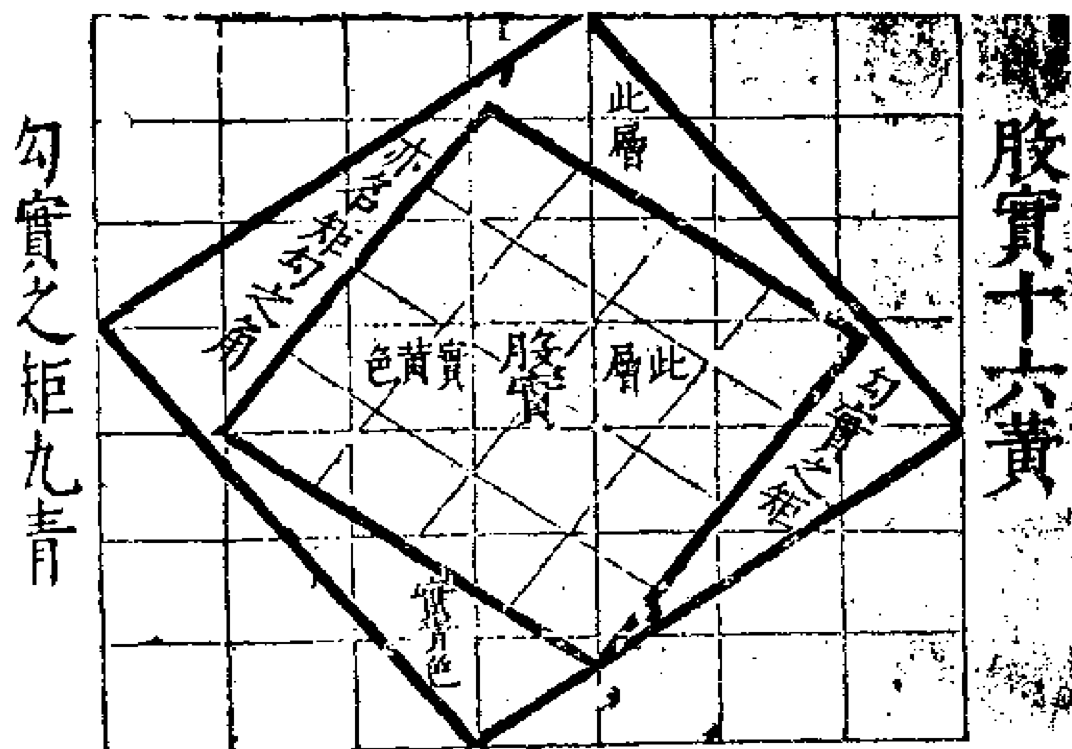
左图所示的七巧板的七块,由五块相似的等腰直角三角形,一块正方形和一块平行四边形组成.你能找到将它们拼成一个正方形的方法吗?试试将它们拼成两个正方形,再试试将它们拼成一个长方形,或一个平行四边形.所有这些都具有一定的挑战性!上页图中的印地安人和他的妻子是洛依德的创作.你能拼出它吗?在洛依德的收藏中,还有其他一些似是而非充满矛盾的图案.最后,希望你自己也能创作并组成一些图形.

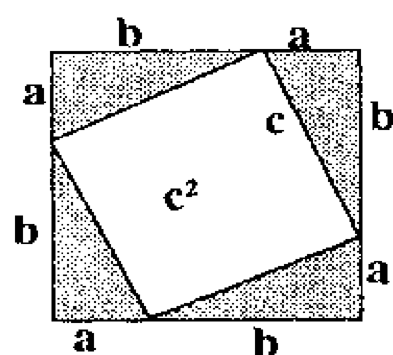
[7]

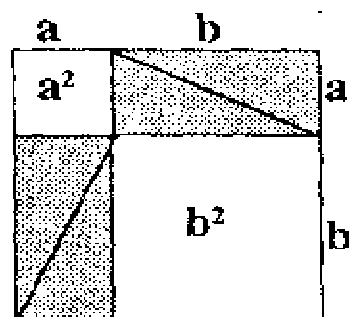
[8]

## 毕达哥拉斯定理的一种优雅证明

下面这张有关毕达哥拉斯定理的图，出自中国的古籍《周髀算经》(该著作成书的时间说法不一，一种说法是估计在公元前1200年，另一说法认为在公元100年). 该书主要内容是有关天文的计算及数学的论述.




左侧正方形阴影区域的面积＝右侧正方形阴影区域的面积.

当对上述图形加以研究并重新整理时,毕达哥拉斯定理的证明便出现了. [9]

# 令人困惑的无穷大

无穷是一种令人困惑的概念.它是一种数、一种量，人们用符号∞(公元1665年由J·瓦里斯发明)表示它，并以此描述一个无尽的数量.倘若没有无穷的概念，许多数学思想也就失去了意义.事实上，微积分的发展和极限的理论都跟无穷的概念紧密联系在一起.

当人们开始考虑无穷的性质和它出现的范围时，常常会发生许多令人困惑的想法.例如，看一看自然数的无穷集合 $N=\{1,2,3,4,\cdots\}$，它能够与完全平方数的集合 $S=\{1,4,9,16,\cdots\}$ 形成一一对应.两者虽说都是无穷集合，但集合 $N$ 相继元素间总是相隔1，而集合 $S$ 相继元素间却相隔越来越远.尽管看起来两者之间元素的数量不同，然而对于集 $N$ 的任一自然数 $k$，集 $S$ 中都有一个元素与之对应，这个元素可由 $k$ 的平方，即 $k^2$ 得到.没有一个 $N$ 的元素在 $S$ 中找不到对应的元素，反之亦然.对自然数立方的集合 $C=\{1,8,27,64,\cdots\}$ 与自然数四次方的集合也有同样的结果.



在加利福尼亚的半月湾，遍布着密密麻麻的南瓜，有无穷多个!

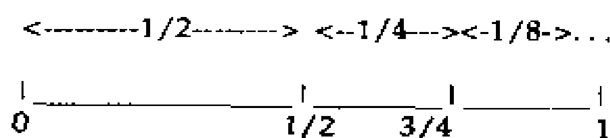
事实上，无穷是导致许多表面上矛盾想法的根由.

1) 一个无穷的数量无需占有一个无限的地方. 例如，线段 $AB$ 上有无穷多个点，但线段 $AB$ 的长度却是有限的.

2) 对数的任一无穷集合，其和未必是一个无限的数量.

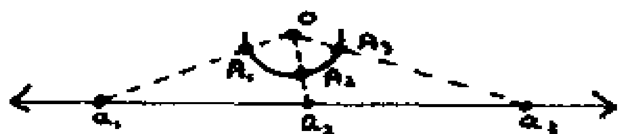
例如：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots=1$.

证明：




可以看出，上述的和绝不会超过1. [10]

3) 一个有限长度的对象能够与无限长度的对象对应. 下图表示一个半圆(具有有限长度)上的点能够与一直线(具有无限长度)上的点成一一对应.



4) 数学上有一种比较无限集大小的方法，这种说法听起来有点自相矛盾. 产生这种误解的原因是因为人们总把无限看成是一样的. 然而确实有一些无限集合比另一些无限集合元素要多. 例如整数集合 $I=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$ 与数轴上点的集合相比，后者比前者有更多的元素.

5) 在自然界中也存在有关无限的悖论. 例如：雪花曲线具有令人惊异的特征，当它的周长趋向无限时，它的面积却是有限的.

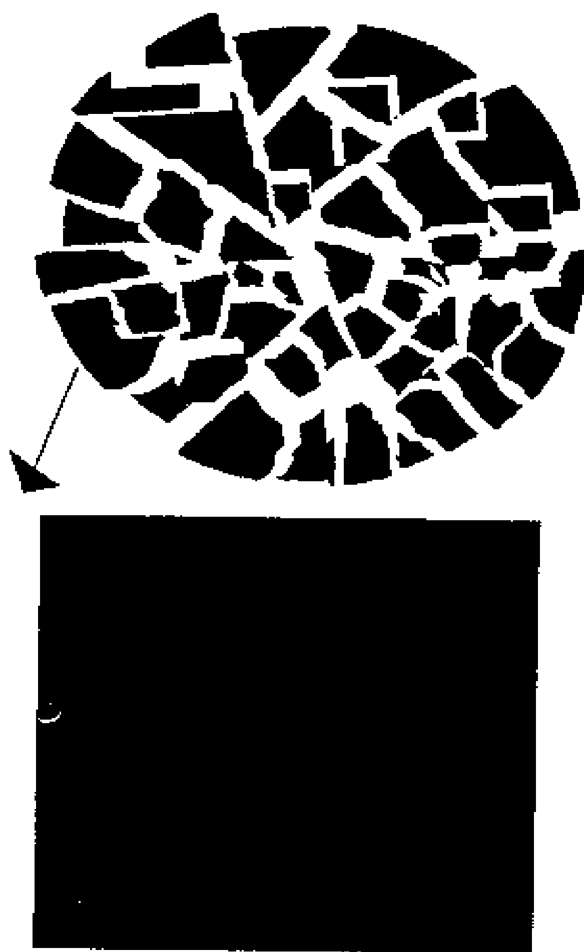
多少世纪来，无限令人困惑，饱受挫折，历经了种种挑战. 芝

诺悖论可以追溯到公元前5世纪,其中最著名的有四个——二分说、阿基里斯与龟、飞矢不动和运动场问题①. 古代的这些问题总是提供有趣的讨论和想法. 今天,空间充满曲线的样式,分形的形成,时间的无穷性,空间状态的有限和无限,对大素数的继续探索,以及用以描述无限集的超限数,等等,所有这一切的研究,都为探索无限创造了一个良好的氛围.

① 译者注:有关二分说和阿基里斯与龟的悖论可见第246~247页"悖论"一节. 飞矢不动悖论的要点是:飞矢在任何确定时刻只能占据空间的一个特定点,在这一瞬间它就静止在这一点上. 运动场问题的悖论说的是:一段时间和它的一半时间相等.

# 化圆为方问题的一种曲解

化圆为方问题——即只用圆规和直尺作一个正方形，使它与给定圆具有相同的面积——是古代三大著名的作图问题之一。二千多年来，它一直激励着数学思想，直到公元1882年，终于被证明为不可能作出①.



公元1925年，A·塔斯克拿掉圆规直尺的限制，并建议把圆切为若干块，然后将它们重组成一个面积相等的正方形.

公元1989年，布达佩斯(匈牙利)罗兰地大学的数学家M·拉兹柯维奇，居然证明了塔斯克的想法是可能的！目前人们正在对他的论证予以仔细的审查，看其中是否存在什么错误或毛病，但至今还没有人发觉出什

① 原注：证明的论据如下：一根直尺能够作出直线段，它的方程是一次的．圆规的另一只脚可以作圆或圆弧，它的方程是二次的．当上述方程联立求解时，最多只能产生二次方程．但对古代三大作图问题，在用代数手段求解时，所获得的方程或包含三次方程，或包含超越数．而只用圆规和直尺是不可能得到这类方程的.

么.在最终的正方形中,自然不允许有裂缝或重叠.拉兹柯维奇[12]估计,要达到问题的要求,大约需要切成$10^{50}$块.

一些逗人喜爱的谜题

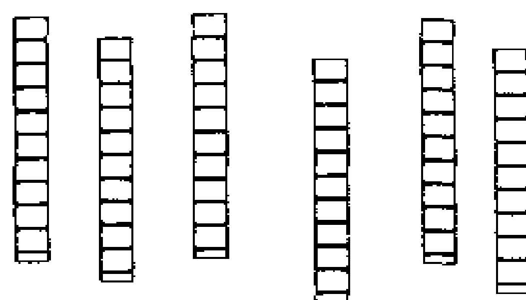
### 蠹鱼问题

设想每卷书有2.5英寸厚，其中包含0.25英寸的封皮.一只蠹鱼有一英寸长，它沿水平方向直线蚌食.从第一卷的前封皮开始，到第六卷的后封皮结束，试问，蠹鱼经历了多长的路？



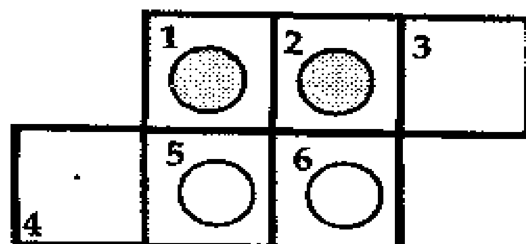
### 竹堆

堆叠六根竹竿，使得它每根都互相接触，但不允许折断或弯曲它们.



### 金银币谜题

要求银币与金币对换位置.硬币一次只能移到一个空格，或垂直方向，或水平方向，或对角方向.每枚硬币只允许占据一个空格.试求最少的移动次数.



## 数的一种令人惊异的性质

对任意的一个整数,以你喜欢的任意方式重新排列,则开头的数与新的数之间的差,永远会被9整除!

| 选择的整数 | 选择的重排 | 差 |
|---|---|---|
| 12563 | 23651 | 11088 |
| | | 除以 9 = 1232 |
| 87 | 78 | 9 |
| | | 除以 9 = 1 |
| 33333 | 33333 | 0 |
| | | 除以 9 = 0 |
| 672636 | 666372 | 6264 |
| | | 除以 9 = 696 |

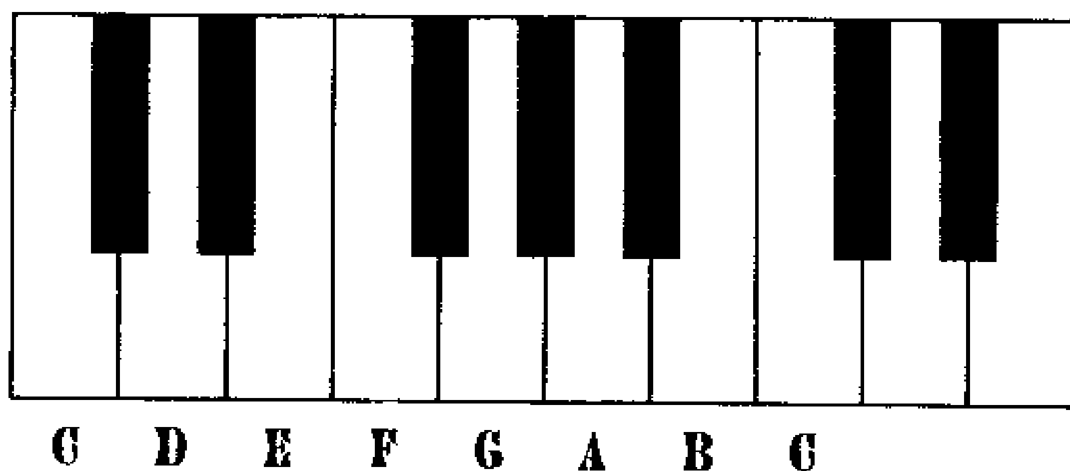
[14]

# 斐 波 那 契 迷

人们发现,斐波那契数列出现在为数众多的领域——包括松果、菠萝、叶子的排列、某些花的花瓣数、与黄金均值的联系、拟黄金矩形、等角螺线,等等——如果我们广为搜寻,那么有时我们还会发现,斐波那契数竟然会出现在一些特殊的对象中.就说一台钢琴,在一个音阶中白色的键数为 8,黑色的键数为 5,这不正符合前面讲到的情形吗?莫非它是斐波那契数列触及的又一个领域?

**1, 1, 2, 3, 5, 8,**

**13, 21, 34,...**



## π的一个神奇的公式

以下公式可以快捷计算出π的值.计算机科学家们利用该公式的一种改造,将π的值计算到小数点后1700万位.

$$\frac{1}{\pi}=2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n(1)_n n!}(1103+26390n)\left(\frac{1}{99}\right)^{4n+2}$$

S·拉马努贾是一位对数学充满热情的数学家,1888年出生于南印度的库巴肯南市.他的数学基础全然靠自学而成.这一事实可以解释他那探讨问题的独创的和非正统的方式.他那些富有价值的公式和整页整页的成果,便是有力的证据.当时没有计算机可以帮助他检验自己的想法,他靠的是完全手工的方法进行计算.如果不是他不顾一切地将自己的发现写给英国数学家G·J·哈代的话,他的成果可能早已散失.哈代慧眼识出了他的天才,于是邀请他到剑桥大学来.就这样,25岁的他,离开了妻子和故土,只身去追求他所热爱和渴望的数学.那时,他对现代欧洲的数学实际上一无所知.这表明了他在某些知识领域上的缺陷.此后七年,他出了很多成果、学习心得和发现,这才逐渐显露出他的真才.由于不知原因的疾病,致使他的身体逐渐瘦弱下去.然而他自己却总是不注意并在发烧情况下坚持工作,从而使[16]他的健康不断恶化,终于在1919年决定返回印度.公元1920年4月,拉马努贾英年病逝,这时他才32岁.

迟至1976年,拉马努贾丢失的笔记终于被发现.那是美国宾夕法尼亚的一位数学家G·安德鲁,在剑桥大学"三一"学院图书馆里的一个装信件和票据的箱子里找到的.

拉马努贾的工作风格是:用石笔在石板上运算,算完擦掉,

3.1415926535897932384626433
383279502884197169399375
105820974944592307816406
286208998628034825342117
067982148086513282306647
093844609550582231725359
4081284811174502841027...

一旦取得一个特殊的公式，便把它记在自己的笔记本里．这样一来，那里都是最终的形式，中间步骤全然略去．事实上，在拉马努贾的笔记本里包含了大约 4000 个的公式和其他的成果．数学家们目前正在研究并试图证明拉马努贾的这些公式．正如哈里发克斯（新斯科半岛）达荷斯大学的数学家 J·博韦因评论的那样：

> “当他把一个惊人的东西带到大庭广众之中时，人们并不把它看成新奇的珍品，只缘它是正确的东西．他们困惑于理论的证据，而这种证据却潜藏于某些地方的周围，而这些地方正是人们所无法知道的．”

**拉马努贾 1914 年的公式**

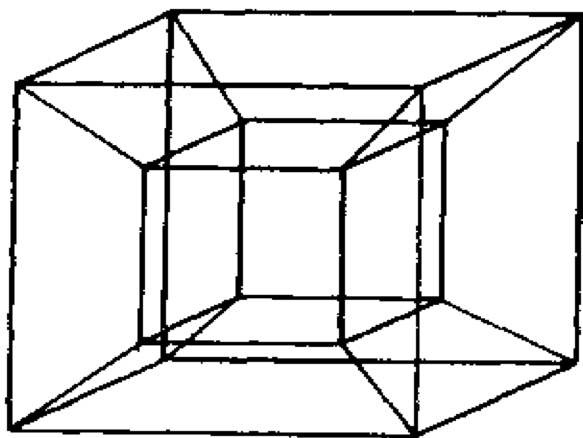
$$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9,801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!\ [1,103+26,390n]}{(n!)^4 396^{4n}},$$

这里 $n!=n(n-1)(n-2)\cdots 1$ 且 $0!=1$.

[17]

## 超空间——一种消失现象的数学

超空间是超立方体、立方镶嵌体和其他的四维物体的世界，它既引发了人们的兴趣，又增进了数学的想象.对这样的一个世界，我们三维的生物只能通过智力加以理解.我们对于维的知识，使我们能够通过逻辑的暗示去表明某处必须存在.对超空间的理解还有赖于我们类似于在二维世界画三维世界那样的能力.

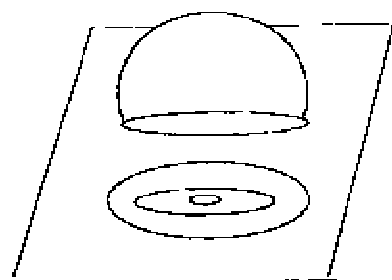


立方镶嵌体是四维立方体的一种表示.一个立方体画在纸上是一种透视图，它暗示具有三维的特征.而立方镶嵌体画在纸上，则是一种透视的透视.

在超空间中会出现什么样的现象呢？超生物又会怎么做呢？为什么他们的动作乍看起来与我们如此不协调呢？一个超生物能够毫不费力地在众目睽睽之下移走物体，而留给我们的感觉只是物体简单地从视野内消失了！所以超生物能够看到任何三维物体或生命形式的内部，并且如果需要的话可以从内部移走任何东西.三维的结在超生物手里可以很简单的打开.一对我们用的手套，也能很容易改变为两只都是左的或两只都是右的手套.这样的事件听起来似乎是天方夜谭，但对数学而言，他们都是顺理成章的现象.

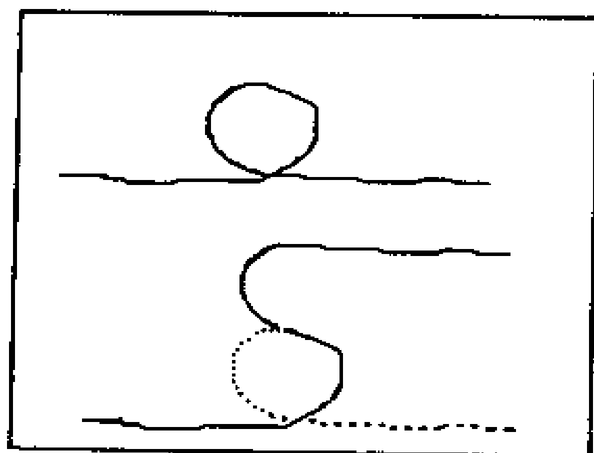


一个超生物进入我们的世界将会被我们的空间所截，就像



一个球穿过一个平面,它在平面上留下了圆的印记.

一个球进入二维世界而为平面所截一样.那么我们能看到超生物的什么呢?我们看到的仅仅是该超生物的一种印记(它的剖面之一),就像一个球穿过一个平面而在平面上留下一系列圆的印记一样.正如二维世界的生物无法看到三维球的深度一样,在三维世界中人们也无法窥见超生物的全貌.我们三维生物能够进入二维世界,并通过简单地拉到三维世界的办法来移动任何二维物体.这在任何二维生物看来,该物体似乎消失了.

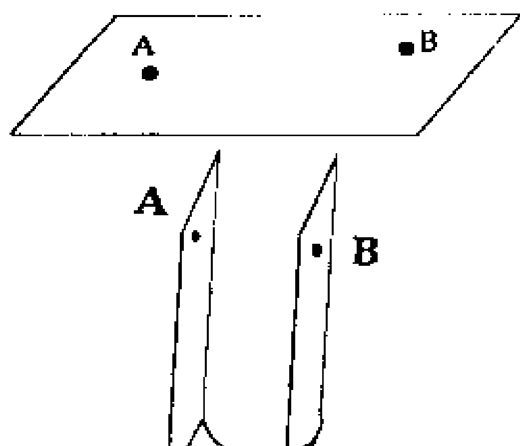


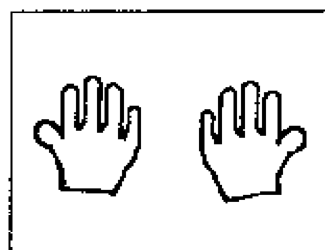
一个二维世界的结是一个扁平的圈.上图说明一个二维的生物要怎样才能拆解一个二维的结.而三维生物则可以很容易地把二维结带到三维去,从而解开它.

一个二维生物的结,对一个三维生物来说要解开它不费吹灰之力,因为在二维世界一个结只是一个圈,如果把圈的一头提到三维去,那么二维的结自然就解开了.对于三维的结,如果一个超生物也这样做的话,那么同样的情况也会发生.

对于二维世界所用的手套,三维生物只需轻松地将左手套拿到三维空间[19]翻一个面,就像一块煎饼翻一个面一样,再放回二维空间,便成了一只右手套.

跟一位超生物朋友在三维世界游历是非常容易的.超生物能够通过第四维将三维空间加以弯曲,就像三维生物将二维空间(平面)弯曲一样,把两个不同的地点弄到一起.

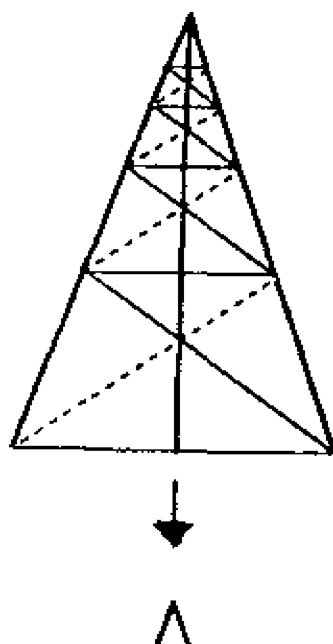


一只二维的右手套能够很容易通过三维空间变为一

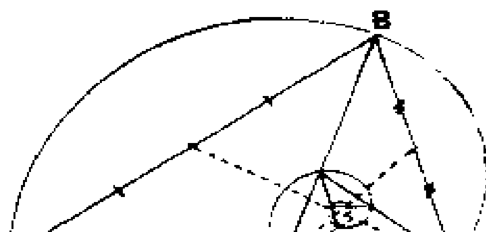
# 自生的黄金三角形

黄金三角形是指一个底角为 72°，顶角为 36°的等腰三角形.当这种三角形的两个底角被平分时，会产生两个新的黄金三角形.这一过程如果沿原黄金三角形的腰无限地继续下去，那么如图所示，将会出现无数个的黄金三角形.



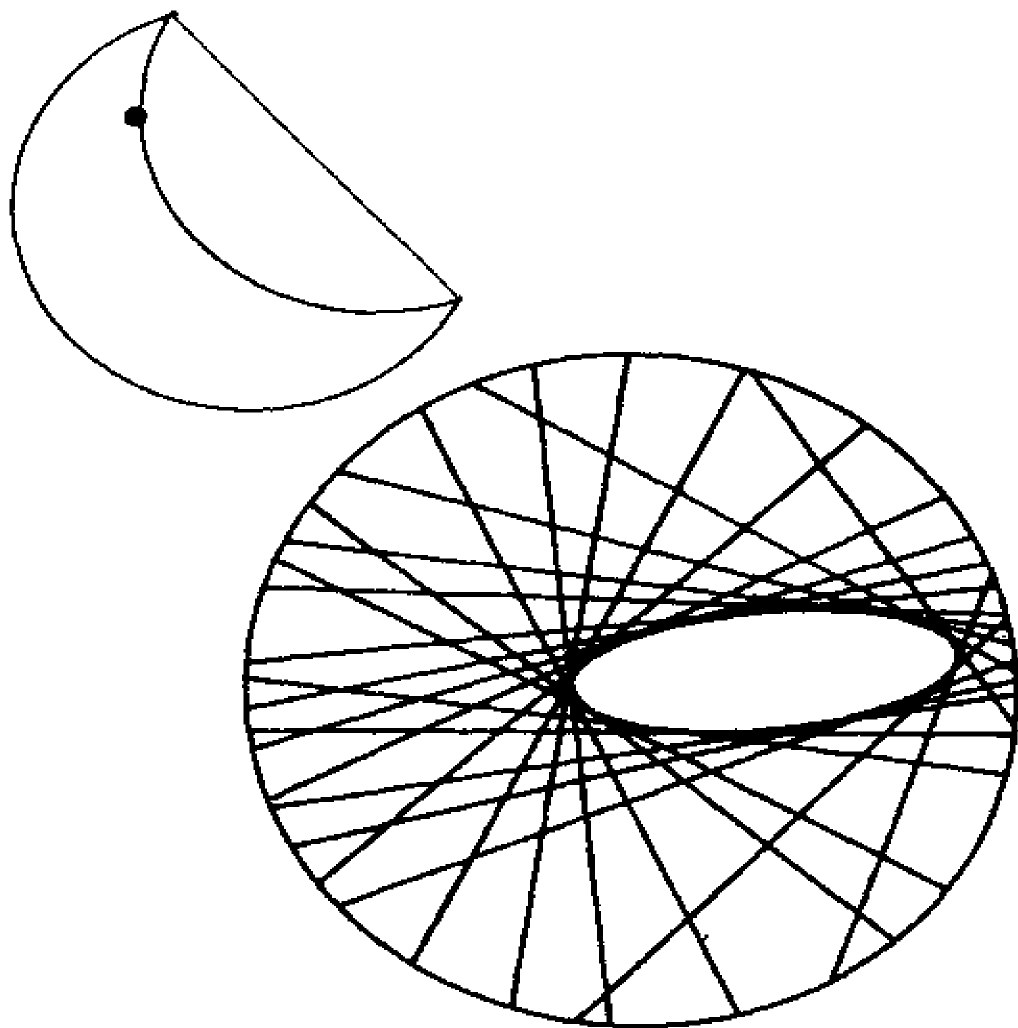
黄金三角形也能如下图所示产生等角螺线和黄金比：

$$\phi=\frac{|AB|}{|BC|}=1.618\cdots$$



# 折一个椭圆

许多的数学思想和对象可以通过折纸来证明或表示. 圆锥截线也不例外. 这里给出的是怎样用纸折出一个椭圆的方法.



●由一张圆形的纸开始.

●在圆的内部选择一个不是圆心的点. 在该点的位置打上点号.

●折叠圆纸片,使圆的周界上有一点落在打点的地方.

●继续上述的过程,使之绕着圆的周界做下去.

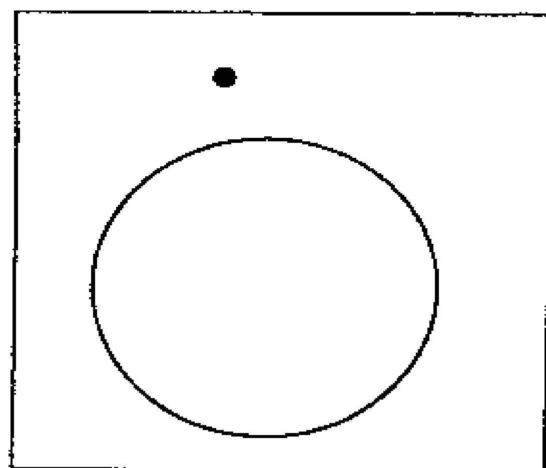
最后,折痕会构成一个椭圆的形状.

# 折 双 曲 线

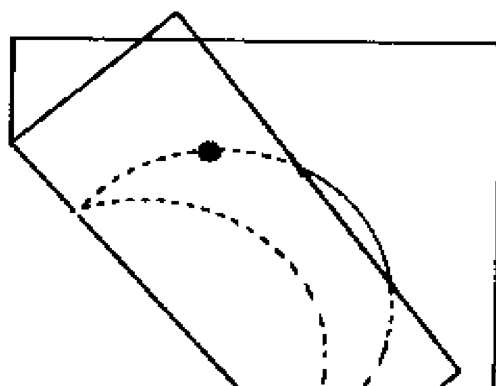
这里给出怎样折双曲线的方法：

●由画在一张纸上的圆开始.

●在圆的外部选择一个点并在该点的位置上打上点号.



●折叠纸片使圆的周界上有一点落在打点的地方，就像下图所示的那样.



●继续上述过程，绕着圆的

## 魔术般的二元卡

二进位制的数可以用来产生一套魔术般的卡片.

这五张卡片唯一地表示从1到31的数.例如,21在二进制

卡片 E

| 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|
| 20 | 21 | 22 | 23 |
| 24 | 25 | 26 | 27 |
| 28 | 29 | 30 | 31 |

16 的位置

卡片 D

| 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|
| 12 | 13 | 14 | 15 |
| 24 | 25 | 26 | 27 |
| 28 | 29 | 30 | 31 |

8 的位置

卡片 C

| 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|
| 12 | 13 | 14 | 15 |
| 20 | 21 | 22 | 23 |
| 28 | 29 | 30 | 31 |

4 的位置

卡片 B

| 2 | 3 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|
| 10 | 11 | 14 | 15 |
| 18 | 19 | 22 | 23 |
| 26 | 27 | 30 | 31 |

2 的位置

卡片 A

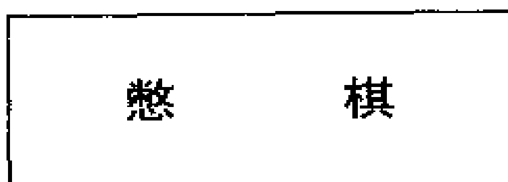
| 1 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|
| 9 | 11 | 13 | 15 |
| 17 | 19 | 21 | 23 |
| 25 | 27 | 29 | 31 |

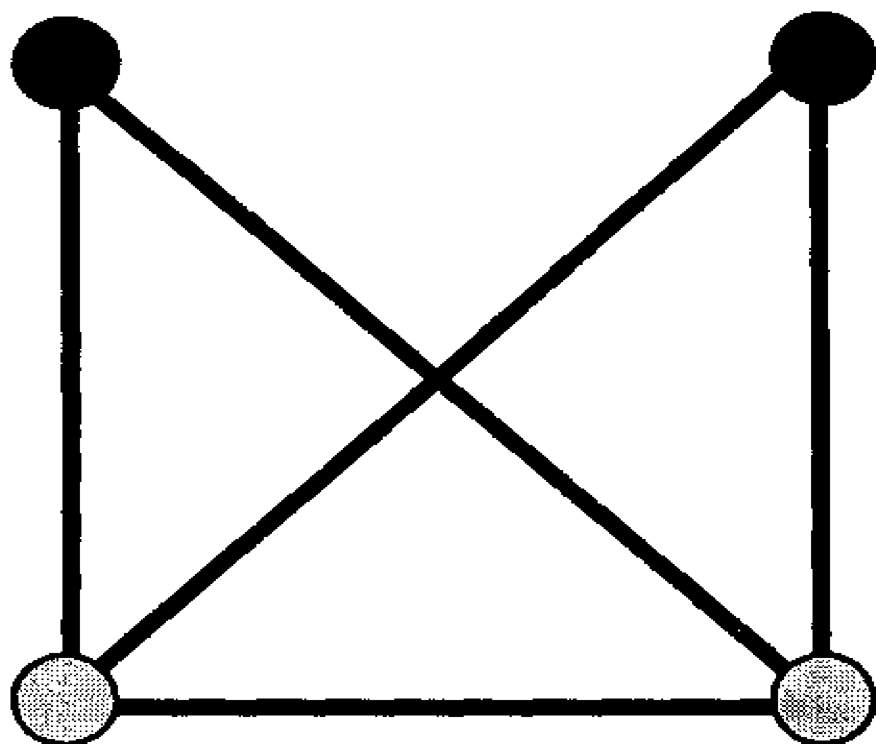
1 的位置

中的写法是10101,因此21只在卡片E,C,A中出现.没有两个数出现在一组相同的卡片中,因为没有两个数有相同的二进制表示法.如果某人说他想的那个数出现在卡片E,C和A上,那[24]么你便能很快地心算出这个数是:16+4+1,即21[①]!

① 原注:在二进制中,1和0是仅有的两个数字,每一张卡片代表二进制的一个位置的值.例如,卡片E是16或$2^4$的位置,等等.数的二进位制表示法指明了在每一张卡片上应当放置哪些数.二进制数的某个位置出现0,表明该数不在相应位置的卡片上.

在中国这个游戏叫"憋死牛",而在朝鲜,它叫做"Ou - moul - ko - no".它看起来似乎非常简单,因为棋盘很小,棋子也只有四个,但不要因此受骗!



**玩法步骤:**

每个游戏者各执两个棋子或专门的石块.开始时他们轮流放置棋子.当四个棋子都放好后,游戏者开始轮流移动自己的棋子,每次只能沿直线移到下一个空的位置.游戏的目标是逼得你对手的棋子无法移动.

[25]

## 埃及的腕尺、掌尺与指尺

埃及人最初的测量工具是采用人体的一部分.腕尺①是指从肘到中指端的距离.每个腕尺分为七个更小的单位,称为掌尺,也就是一个人手掌的宽度.每个掌尺又分为四个指尺——即四个手指头(不算大拇指).自然,没有人会由于把这些测量工具带在身边而感到不便和烦恼.只是这些"尺"的长度有赖于使用人身体部位的长短罢了!结果埃及人发展了两种不同规格的腕尺,一种是皇家钦定的腕尺≈20.59英寸,另一种是民间的短腕尺≈17.72英寸.

埃及人还制作了相应的金属棒,用以表示皇家的腕尺和短腕尺,棒上带有细分的掌尺和指尺.这种棒就是现代尺子的前身.

埃及的腕尺,测棒上带有细分的掌尺和指尺.

[26]

① 原注:腕尺这一术语也用于希腊和罗马,并作为他们的测量单位.一个希腊腕尺近似于18.22英寸,而一个罗马腕尺则大约为17.47英寸.

# 大数——隐藏的解答

公元1769年，欧拉对费尔马大定理[1]作了创新，提出了 $a^4+b^4+c^4=d^4$ 没有正整数解的假定.时隔二百年后的今天，数学家们用计算机找到了适合以上方程的整数解，从而推翻了欧拉的猜想.

哈佛大学的N·D·埃尔钦斯发现了第一个例子：$a=2682440$；$b=15365639$；$c=18796760$；$d=20516673$. 而波士顿剑桥的一个号称"思维机器"团体的R·弗莱，则发现了较小的一组正整数解[2].

2,682,440
15,365,639
18,796,760
20,516,673

*Mathematicians using computers contradict Euler*

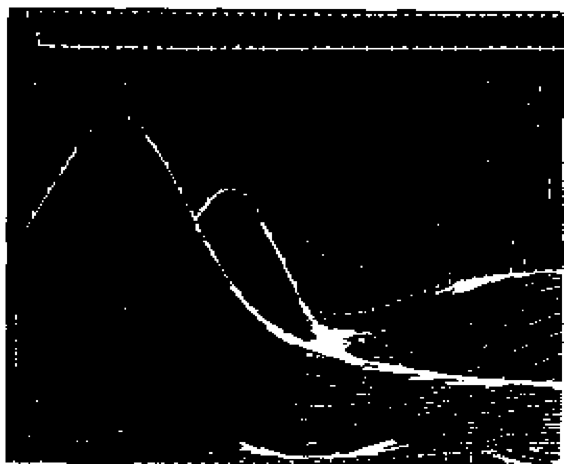
数学家们用计算机驳倒了欧拉！ [27]

① 原注：更多的信息见第178页"费尔马大定理——已证还是未证"一节.

② 原注：见《科学新闻》的"珍奇的大数乘方"，第133卷，1988年1月30日.

## 计算机制作模型

今天,数学家们用计算机的视觉功能,创造出各种各样的模型,从而开拓了一个极富想象的世界.俗话说"眼见为实",对某项改革当用计算机加以描象时,其革新后的成果便会历历展现在人们的眼前.近十年来计算机技术的变化,可以说是惊人的飞跃.从单板机"星际旅行"的出现到下一代机的产生,并没有相隔太远.



引自M·L·普鲁依特的《计算机图解》.经多佛出版社许可.

许多领域的专家们都发现了计算机描象技术的应用——外科医生用计算机描象对外科手术进行研究;建筑师们则通过它观察设计完成后的建筑物式样,并能从不同的角度去观察不同的光线和景观;环保工作者则用计算机描象来预报自然现象的结果;领航员能够通过计算机不离开地面而经历不同环境下的喷气飞行;音乐家能够用计算机创作出音乐的谱子;检疫官员能够用计算机追踪和预测疾病的传播;艺术家和电影摄影师能够用计算机创造出逼真的场景;……数学家目前正协同与图形专家及计算机科学家合作,以达到可视技术的新的高度.计算机通过复杂的程序设计创造出多彩的逼真模型,而这一切都绝不背离数学家们的想法.计算机模型还有助于下述领域问题的解决:诸如结的理论、肥皂泡、超空间、空间镶嵌、非欧模型等等.几乎所有的问题和想法,都由人们的想象加以设计和规划,然后经由计算机制作模型,而计算机则能很容易地担负这项工作.

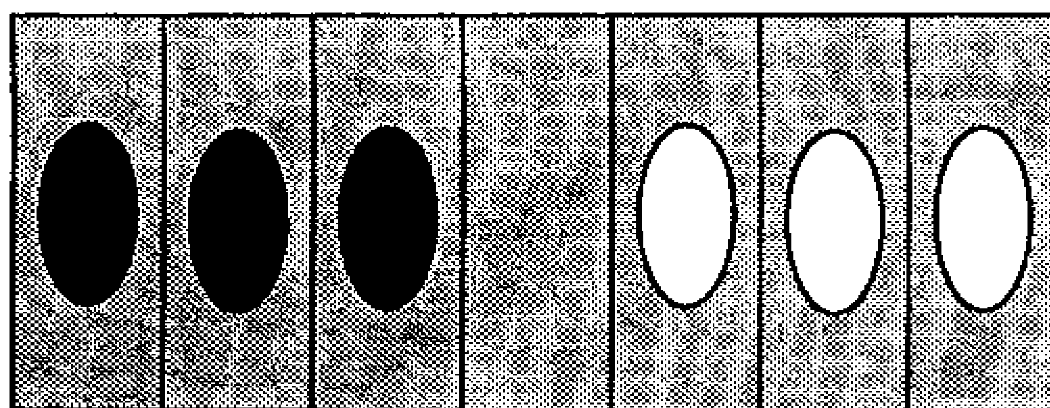
# 单人棋谜题

这个谜题有许多不同的名字，如“八人同船”、“全在一线”等等.

白子必须按以下的法则与黑子交换位置：

1）同样颜色的棋子不能互相跳过.

2）一次只能移动或跳过一个棋子到达空位.



求最少的移动次数.

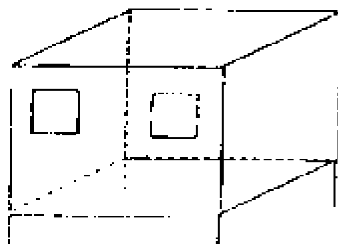
如果增加棋子数，将使该游戏更加富于挑战性！

（移动的最少次数见附录）

[29]

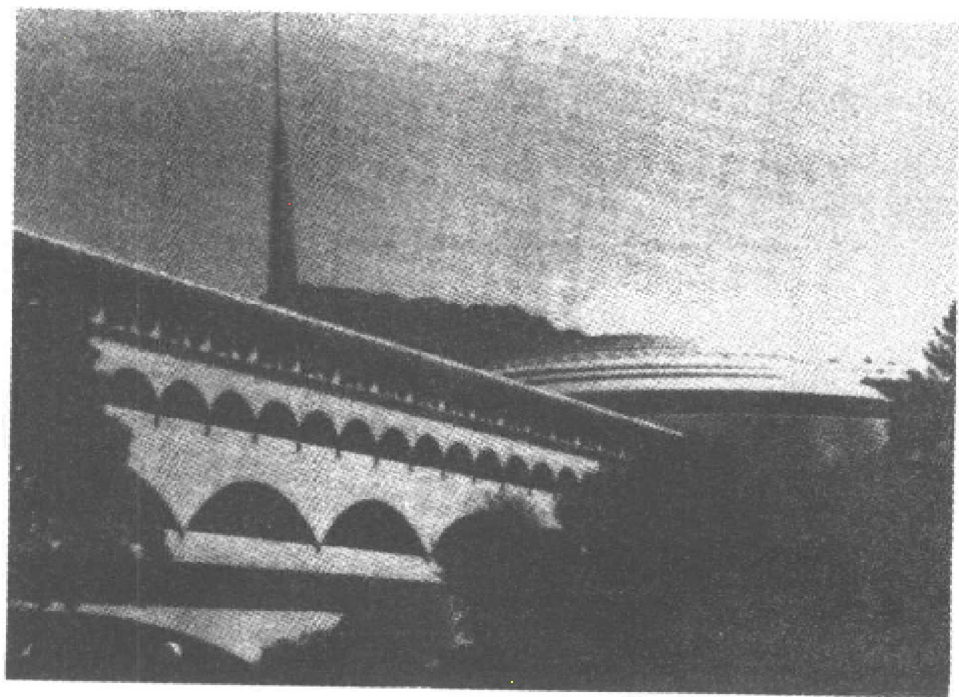
## 盒子的消除——赖特的建筑学

F·L·赖特的作品有明显的风格，他的建筑物结构上都不相同，式样上也没有类似的．其建筑设计有点哲学的味道．用他的话来说，"建筑学是一门创造结构、表达思想的科学艺术．"他的建筑式样具有"有机结构"的美称——环绕四周的景致、材料、方法、效果，一并融和在一种特有方式的想象中．



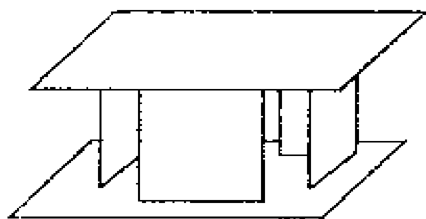
盒子的结构

赖特的设计图案，无论其内部或外部空间对建筑都有着深远的影响．他称之为"盒子的消除"．住宅，无论是商品房或私人房，在赖特的眼光里都是盒子或立方体的集成物．在欧氏几何里空间是作为点的集合来界定的．虽然立方体常被用来表示欧

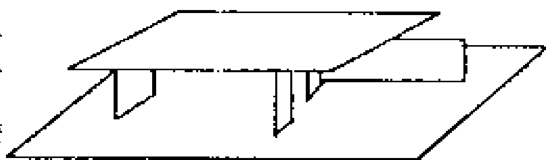


马林郡的市政中心是赖特后期的设计之一．

氏几何的空间，但我们知道空间是没有疆界和限制的. 赖特希望他的作品能给出空间的感觉——点从内部涌向外部. 沿着这条思路，他找到了一种在设计中消除传统盒子的方法. 他寻求界限感觉的一种改变，并将它从表示盒子式样的外部世界分离出来. 赖特了解一般建筑材料所没有利用到的潜能. 这些材料——钢材、玻璃等——按新的设计变动配置，使得盒子能够拆除，以允许内部空间和外部空间合并. 赖特的设计废除了盒子的角落，这 [30] 是应用悬臂的办法把角落的支柱移到墙位的地方. 这样一来，居住者的眼睛就不会被限制或吸引到角落. 这意味着空间允许溢出. 用悬臂支撑的方式重新配置柱的结构，墙看起来并不比封闭式的墙更长，但它却是独立的，可以根据需要加以修改：或缩短，或延长，或重新配置.



赖特的想法并不停留在水平的方向上，而且也在垂直的方向上自由地规划. 他拆除了檐板，打开了朝天的顶部. 他在设计中剔除了烟囱等盒子般的附加物，取而代之的是细而直的梁，并使它们成为天花板的一部分，从而创造出一种形式的连续. 现在，建筑物的内部和外部空间都能全方位地移动. 而这种允许空间自由移动正是赖特"有机结构"的精髓. 正像赖特所说的："有 [31] 机结构是这样的一种建筑结构，你所感觉和看到的都像发生在第三维……空间由第三维而变得活跃起来."①



① 原注：F·L·赖特，《一种美国的建筑》，1955 年.

## π小数值的继续

在日常生活中对大多数人来说只要知道 $\pi$ 的四位小数值就足够了！然而英国数学家威廉·向克斯却花了20年时间用手工把 $\pi$ 算到了小数点后707位.不幸的是,其中第528位起算错了,但这一错误直至1945年前始终未被发现.

$$\pi=3.14159265358979323846\ldots$$

为什么人们希望把 $\pi$ 的值算到小数点后百万位,就像人们今天用超级计算机所做的那样呢？又为什么 $\pi$ 的小数值有如此的魅力呢？

●它可以检验超级计算机的硬件和软件的性能.

●计算的方法和思路可以引发新的概念和思想.

●$\pi$ 的数字展开真的没有一定的模式吗？它的样式①含有无穷的变化吗？

●$\pi$ 的数字展开中某些数字出现的频率会比另一些高吗？或许它们并非完全随意？

---

① 原注:一些不平常的频率出现在 $\pi$ 的小数中——在52638位小数里 $e$ 的头六位数字出现8次,而 $\sqrt{2}$ 的头八位数字才刚刚开始出现.在 $\pi$ 的头10000000位小数中,$\pi$ 的头六位数字(314159)至少出现6次.

大约数学家们对 $\pi$ 的困惑经历了几个世纪.对 $\pi$ 的探索，数学家们好比登山运动员，正在奋力向上攀登![1] [32]

① 译者注：目前，$\pi$ 的值已算到小数后2061.5843亿位.这一纪录是日本东京大学教授金田康正和他的助手于1999年9月创造的.计算用了37小时21分钟，检验用了46小时零7分钟.计算出的最后一位数是"4".金田教授等两年前创下的圆周率计算世界纪录为515亿位.从现有资料看，$\pi$ 的数字展开中十个数字出现的频率平分秋色.

## 精确地刻划地震

地震可以通过它所产生的波来刻划.地震波可以根据地震出现后波到达地震仪的时间不同而分为三种类型：

P波——速度每秒5英里,是类似于声波的经向压缩波,它能使岩石在它行进的方向振动.

S波——速度每秒3英里,是一种抖颤波,它能使岩石在波行进垂直的方向振动.

L波——速度每秒2.5英里,是一种表面的波,它限制在地球的表面,有点像海洋的波浪.




黑色的地域表示世界上地震的多发区.

由于以上三种波以不同的速度行进,所以它们各自以不同的间隔和形状出现在地震仪上.P波首先出现,当它渐息的时候S波随之而来.如果震中的位置很近于地震仪,则S波将较快到达.由P波和S波不同的速度,可以确定在地震时间里这些波行进的距离.通过波对不同物质的反射等资料,还能得知地球内部构造的信息.许多地震是发生在地球的外表,而缺少L波则可确定地震源于地球的深部.

当一次地震发生时,各不同观测站的地震仪记录下了不同类型的波到达的时间,从而测出了地震发生地与观测站点的距离.以各站点为中心,以相应的距离为半径作圆,则地震中心位于所画圆的交点上.[33]

# 玛雅人的数学

由于西班牙征服者好奇和贪心造成的狂热,致使大部分玛雅文化的记录和文献散失了.

《东印度炮手与犹加敦的关系》一书,在西班牙马德里的洛雅尔学院的图书馆里被冷落了好些年,直至1869年为法国教士布拉雪所发现.幸运的是,这本书给一种文化的存在带来了光明.该书作者德·兰达试图烧毁用玛雅象形文字写的本地书.他是一个热心的天主教教义的传播者.他感到毁掉玛雅人书写的东西,可以强迫本地人学习西班牙文化,并接受天主教信仰.在他的书中描述了一些难懂的象形文字,这些文字连同其文化传统都被毁了,只留下了出现在天文计算中的记数法,以及玛雅历法的时间计算,但没有有关他们数学和建筑方面成就的书面上的东西.因此,任何的结论都只能是一种假想.

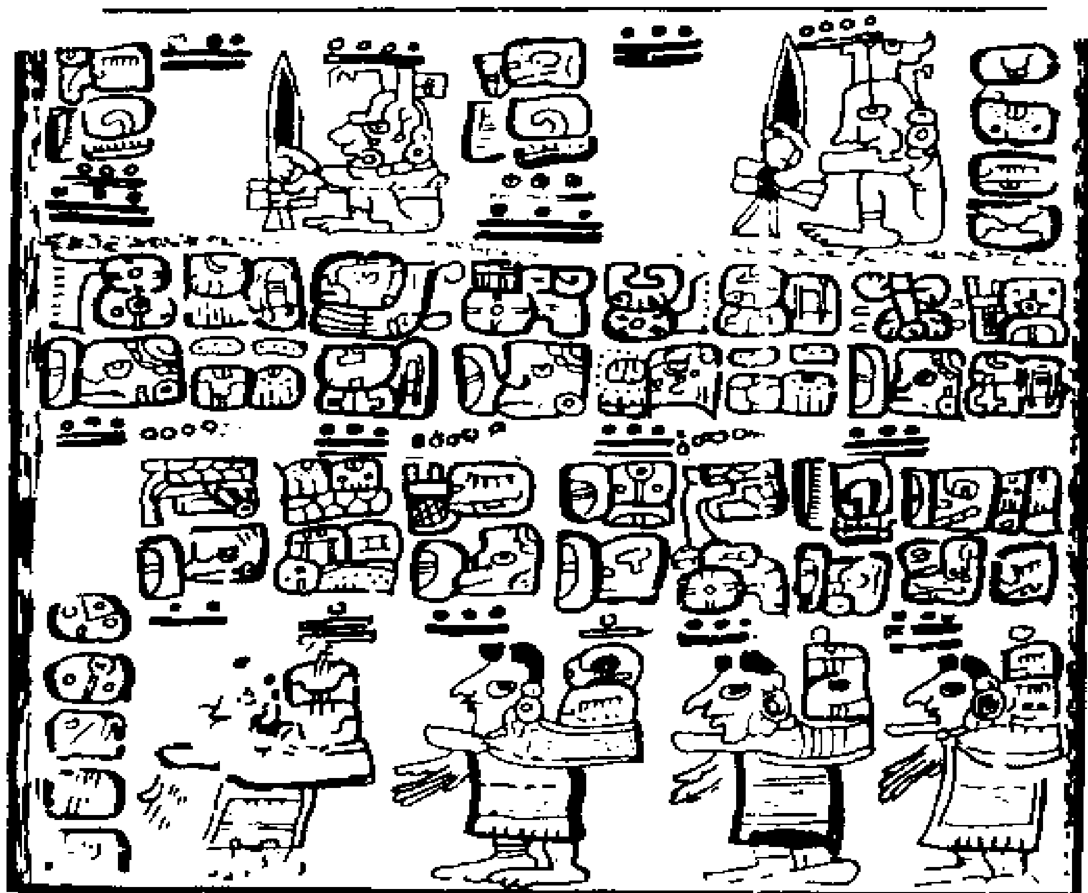
玛雅的数学,从仅存的资料中得知其包含:数的系统、位置值、零,以及使人印象深刻的保留时间痕迹的方法.

不幸的是,大多数玛雅资料人们至今无法判读.例如,我们知道他们是按20进制计算的,但我们没有他们利用这种系统计算日期的直接证据,因为有关日期的记录都被毁了.目前可以信赖的只有他们关于天文和历法的记载,从中知道他们发展了一种位置值的系统,用它可以表示很大的数(实际上要多大都可以).他们也用一个符号表示一个单位的空缺,因而可以说已经有了零的概念.由于宗教和仪式在他们的生活中占据了重要的角色,甚至于控制了他们的生活,因而天文和日历的记录较为广泛. [34]

玛雅人的历法比现代的格里高里历或其他文化的历法更为精密.他们发展了三种历法: [35]

●礼仪历法——以260天为一循环;

●太阳历——以365⁺天为一循环;

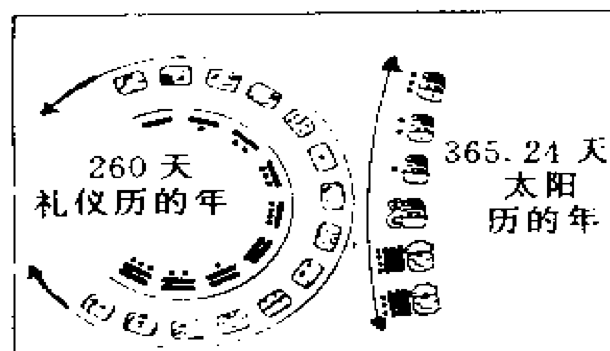


玛雅日历一页中部分内容的记载.

●金星历——以584天为一循环.

玛雅人设立的太阳历,其一天的误差仅为万分之1.98,对比之下,格里高里历的一天误差却达万分之3.02.当时巴任奎城的玛雅天文学家计算两个相连满月之间的平均周期,他们记录了81个阴历月中共有2392天,从而得出每个阴历月有29.5308天,而在现代的天文计算中一个阴历月为29.53059天.

玛雅历法对时间的概念不是很严格的.他们把日期与他们神的名字联系起来,使日期人格化(如下图中的亚赫和丘姆库).每个日期都有一位神负责,依日、月、年轮流担负,循环不息.




太阳历与礼仪历的结合，每 52 年为一个历法周期.

| 礼仪历的日期 | 太阳历的日期 |
| --- | --- |
| 13 亚赫 | 18 丘姆库 |

用礼仪历和太阳历两种符号写的日期.

礼仪历由 260 天组成，每 20 天一循环，每天后面都有一位神的名字，每个神的形象都与从 1 到 13 的数相结合，这样便产生 260 天的历法. 在历法的 260 天中，每天的神的形象与数字的配合，标记都没有重复. 因此，在神的形象与循环反复的 1 到 13 的数之间形成一一对应.

神的形象：A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T A B C D E F G ……

数：1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 1……

有点类似于占星学，玛雅人深信 260 天日子的每一天都有它固有的特性，吉利或不吉利有赖于它们的符号. 他们相信日子的本性. 如果你在这一天出生，那么一种特性将会伴随着你和你的一生.

太阳历又称“惯历”，由 18 个月(每月 20 天)构成. 在太阳历

365 天中还留下 5 天，这 5 天被认为是无生命和无用的日子．在这 5 天期间，人们各自处理自家的事情，但行动必须由宗教的信念约束．

太阳历与礼仪历同时使用，这就使得一天会有两种日期的算法．考虑到这两种系统各自日期的构造方式，可以推出整个体系每 52 年重复一次．这种历法的结合称为历法的轮回．$\frac{365\times260}{5}=18980$ 天 $=52$ 太阳年或 73 个礼仪年(即 18980 是 260 与 365 的最小公倍数)．这意味着在 52 年间每一天都有唯一的标记．

[37]

至于玛雅人的金星历，那是基于人们在地面上两次看到金星位于太阳相反位置时相隔的天数来设置的．金星会合的周期在 580～588 天之间变化，平均为 583.92 天．玛雅人取其为 584 天．这样计算大约 6000 年才会误差一天．

如果把太阳历、礼仪历和金星历三者结合，那么在几千年时间内，每一天所用的名称都将是唯一的．

与历法及日期名称自然地牵连在一起的，就是有关玛雅人的学识和宗教，这是我极力希望读者去探究的．按玛雅人的历法，我们现今的轮回始于公元前 3113 年 8 月 12 日，而于公元 2011 年 12 月 24 日以“世界毁灭”告终．

玛雅人的数的系统多半受他们历法的影响．因为他们用的是一种修改的 20 进制位置值体系：

· —— 代表 1；

— —— 代表 5；

⬬ —— 代表零．

但他们的位置值并不严格遵循 20 进制，即不是 $1=20^0$，$20=20^1$，$400=20^2$，$8000=20^3$，$160000=20^4$，……而是越过头两位，从第三位起遵循 20 进制，即 $1=20^0$，$20=20^1$，$360=18\times20^1$，$7200=18\times20^2$，$144000=18\times20^3$，……这里我们要注意的是，所

用的 18 和 20 正是太阳历和礼仪历中提到的.玛雅人用一个符号代表零,这个零有两种作用:一是作为位置的持有者,二是作为数量.下面是一个例子,它表明玛雅人是怎样书写 4326 这样一个数的.

12 (360的)

0 (20的)

6 (1的)

[38]

# 手性——用手的习惯

宇宙是右手系还是左手系，或者两者兼有？谁也不知道.但宇宙中的许多物体确实显示出手性——右手系或左手系.如果一个物体与它的镜像相同,那么这个物体就是无手性的.例如球或矩形都是无手性的.手性的物体是这样的东西,它们与其镜像不能完全吻合.一颗螺丝、一棵树、一只手都是手性物体的例子,要么是右手系,要么是左手系.分子也被发现具有右旋的形式和左旋的形式.在植物、贝壳、细菌、脐带、动物的角、骨的生成、树皮等处,我们都能找到右旋螺线和左旋螺线.在某些范围,一种手性比另一种手性占有优势.例如,用右手习惯的人比用左手习惯的人来得多.海贝的螺旋、植物和细菌也是右旋的居多.然而氨基酸则主要是左旋的,中微子则只有左旋的.有些成分是由两种方式构成,具体依赖于存在的状态与所起的变化.科学家们在极微小和极宏大的水平上研究手性.他们甚至分析了控制宇宙四种力量的手性——引力、电磁力、强核子力和弱核子力.他们是否发现自然在创造一种镜像形式的均衡?手性能否解开宇宙的更多秘密?人们正拭目以待!



紫藤的右旋螺线和忍冬的左旋螺线.



一只阿拉斯加巨角野羊的角,右旋或左旋的螺线.

[39]

# 混沌理论——在混沌中有序吗?

无论是从古代的神谕和预言，还是从今天日益流行的宿命卡、占星图、算命先生和所用的水晶球，人类总是希望知道未来.此外，人们还在以下领域谋求预测：

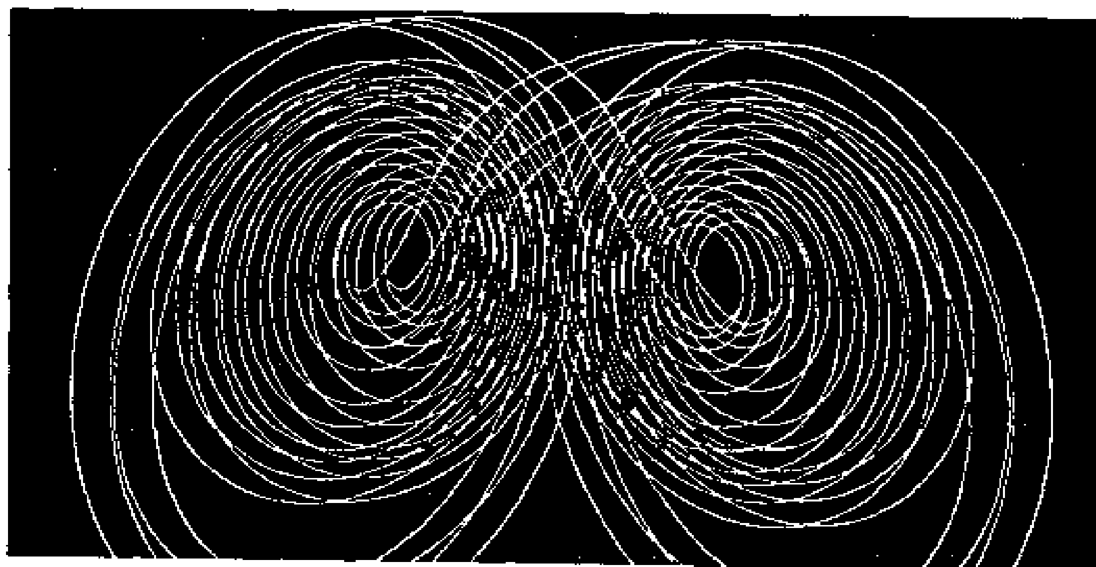
- 气候
- 地震
- 价格
- 股票市场
- 利率
- 经济

为了控制我们的生活，我们寻求精密和昂贵的设备和方法，以求预测.但是我们有能力对变化万千的现象作长时间可靠的预测吗？自然现象会遵循一种可预知的模式吗？它们会以一种循环的模式重复结果吗？多少年来，种种的科学都依赖于将现有的模式公式化、理论化，并进而形成一般性的规律.然而混沌理论却使科学界为之震动.物理学家和其他有着传统思想的科学家，开始更加认真地把眼光注视在混沌理论上.这一理论表明，在这个世界上一件非常简单的事，都可能复杂化为宇宙间的重大事件.而这种演化如果用公式和法则，大概几个世纪也难以描述什么将会发生.训练有素的科学家们正在使自己的数学嗅觉更加敏锐，以便当混沌现象出现在自己所从事的领域时，能够警觉地了解并认识它.

混沌的历史始于本世纪60年代初，为了气象学的研究和它数学上的完善，爱德华·洛伦兹用一台计算机探索热空气上升所[40]引起的各种变化.他发现：初始资料简单和细微的改变，结果会出现巨大的不同，也就是说引发了混沌事件.在天气预测里这种现象称为"蝴蝶效应"——它类同于在地球的某个角落一只蝴蝶翅膀的拍动(小小的变化)所引起的空气扰动，能够在地球的另

一个角落增强为大范围的风暴！从技术上讲，所作的描述敏感地依赖于初始状态.一个微小变化的出现，在天气预报的总体图象中，都可能延续为全球性的效应.由于人们无法记录其所有可能的变化，也无法关注到全部简单而微小的情形，这就使得准确预测成为不可能.因为信息的微小误差，经过不断加强，便可能导致混沌事件.

当洛伦兹把他在三维空间的实验结果描绘出来时，第一幅混沌科学的图画被创造了出来.其结果是一种类似于三维螺线的曲线，它决不自交或重复.它就是著名的洛伦兹吸引子.



[41] 洛伦兹吸引子的一种艺术再现.

奇异的吸引子是混沌理论中对于上述形状出现的一般性术语，它可以在多维的空间中描画.奇异的吸引子能够不断地变化，无尽地打圈，但决不自我重复.洛伦兹的成果发表于 1963 年的《大气科学杂志》.不幸的是，那时其他领域的科学家并没有接受和理睬它.

直至70年代，其他的数学家和科学家也发现了类似的结

果[1],特别是计算机被用来描画有关资料的立体模型之后.这种研究在一些非常宽广但看起来却毫无关系的领域里进行,而结果却出现惊人的相似——外观上再三出现奇异的吸引子.下面是一些探索的领域,在这些领域中人们发现了混沌理论:

1) 记录尼罗河的泛滥
2) 地震
3) 棉花价格的波动
4) 在平滑流体与湍流之间的转折点
5) 统计经济学
6) 在电话线路中噪音的分离
7) 天体轨道的变化
   - 土星的最小卫星(亥伯龙神)的轨道
   - 冥王星的轨道
   - 火星和木星的某些卫星轨道
8) 木星的大红斑的变化
9) 流体动力学的变化
   - 一个水龙头滴下的水流的变化
   - 一个水轮流出水的变化
10) 非线性三角函数的变化

[1] 原注:曼德勃罗是最早注意到吸引子的一位数学家.他所从事的似乎是一个与此毫无关系的领域.此外,混沌理论也由于曼德勃罗的分形的成果而增大了影响.通常计算机能够产生一种无限变化的系统图象.这种图象可以是整齐而有系统的,也可是随机的,只是当它放大的时候,并不失去其细微的部分.这种几何对象,在一再变小的范围里,无尽地自我重复,产生一个原始形状的微型式样(例如雪花曲线).分形成为一种自然的几何的标志,而且能利用计算机来描述自然的形态(诸如云朵、生姜根、海岸线等).这些用过去的欧几里得几何的方法都是无法描述的.

11) 生态学

- 在塞若兰荒漠高原上蚂蚁数量的波动
- [42] 在学校孩子中突发麻疹的波动
- 在澳大利亚昆虫的蔓延
- 加拿大山猫数量的波动

混沌理论并不注重所考虑现象的简单或复杂,而是注重它发生的无法预测性,以及其奇异吸引子的形式.在混沌现象里,尽管变化是遵循奇异吸引子的模式,但吸引子的性质使得它不可能预测将来的结果①.一个重要的方面是:两条螺旋形的曲线决不自交,它们由无数不同的依次产生的富有美感的曲线所组成,这些曲线除不相交外也不重复.在混沌理论的研究中,一种全新的科学实验得到了发展②,在那里数学成为一种重要的探索手段,而结果则常常藏匿于科学实验室里的计算机之中.

混沌理论要求科学家们在所有的领域施展高超的数学技巧,以使自己能更好地认识所获得的结果的内在意义.数学曾经推动了分形领域的发展,帮助描述和解析了无定形的、非对称的和随意性的自然环境.至于现代的混沌理论,我们发现数学家们[43]正处于揭示混沌奥秘的门槛上.

---

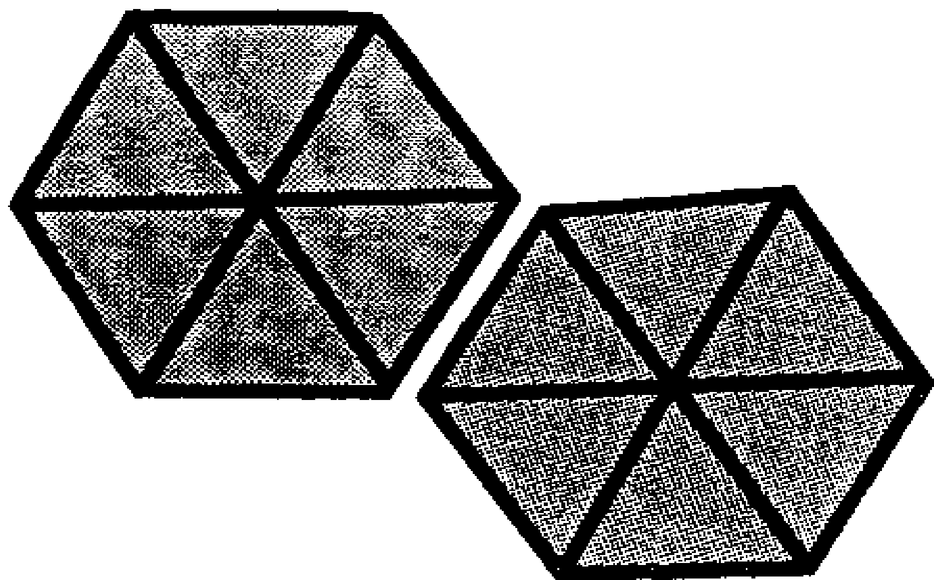
① 原注:地球可能在数百万年的时间里遵循着一种可预测的轨道运行,然后突然间进入一种混沌状态.数百万年时间对于宇宙的存在来说,只是微小的一瞬间.

② 原注:按《科学新闻》1991年1月26日公布的资料,海军地面作战中心的科学家们在实验室中对一根磁条在稳定的磁场下作微小的调整,结果出现混沌运动.也就是说,他们用微小的变化找到了对混沌进程的控制.

# 6－6 折变形

从广义上讲，折变形可以看成是一类拓扑模型．它是一张画在纸上的图，面上标有各种不同的数字，这些数字在折曲成折变形时暴露出来．

折变形最初是作为玩具和魔术设计而于19世纪90年代出现的．6－6折变形则于1934年由A·H·斯通创作．那时他还是一位普林斯顿大学的英国毕业生，为了使美国的纸张适于他英国的笔记本，他从每一张纸上切去一溜条子．由于他对折变体这类错综复杂的图形怀有浓厚的兴趣，所以便利用这些纸条为材料，尝试用不同的方式来折叠，终于作出了6－6折变形．作为一种结果，他与三位朋友B·吐克曼、R·费合曼及J·叶凯，研究了6－6折变形的性质，并发展了一种关于这些形体的完整的数学理论．此后又有若干有关折变形的科学论文发表[①]．



[44]

① 原注：马丁·加德纳的论文发表于《科学美国人》，1956年；O·C·奥克里和R·T·威士纳的论文发表于《美国数学月刊》，1957年3月．

前面

1

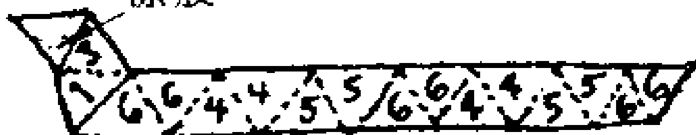






后面

2



涂胶

3



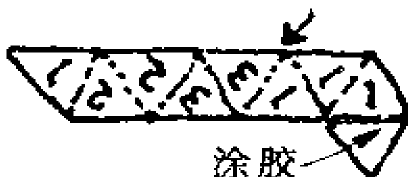
4



把2折在
2的上面

5

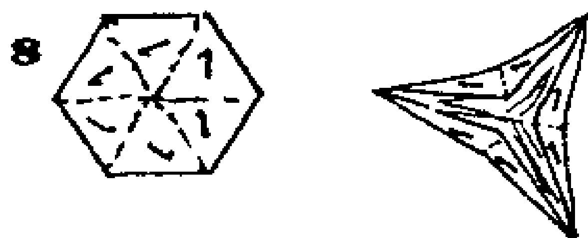
6




7




把3折到下面,使得2折在背后的2的下面.




折 曲 变 化

1）挤捏折变形使之形成图示的形状．然后像开花一样打开中心．如果折变形不打开而沿着没有用到的折痕捏，也会形成同样的形状．

2）你能够很容易地通过实践进行折曲变化．

3）继续折变，你能得到所有的六种面（每种面上的六个数字均相同——译者）．

[45]

## 对称——数学的均衡行为

把你的两只手正放在桌面上.想象一条垂直平分两大拇指之间连线的直线,它就是对称轴.如果把一面镜子放在这条直线上并倾向左手一点,那么它将在与你右手相应的位置形成一个映像.

一只蝴蝶的体态、一片叶子的形状、人类的身体、一个完整的圆以及蜂窝结构等等,一看之下给人的感觉是完全均衡的,这多半要归因于它们的对称.

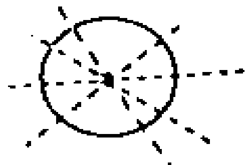
对称的概念出现在自然、艺术、科学、建筑乃至诗歌中.事实上,它能够在我们生活的几乎所有方面找到.在一些东西中它似乎是固有的,以致于我们常常视其为当然.有时一种形式上的差缺,也会成为特殊的吸引人的品质.当我们看到一种图案或雕塑时,无须过分留意即能判定(几乎是直接的)喜欢它或不喜欢它,而它的对称或差缺,大概是影响我们感觉的重要因素.

### 数学的对称

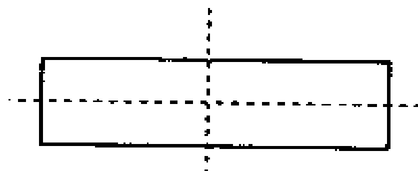
从数学观点看,如果能够找到一条直线,它分一个对象为两个全等的部分,或者沿这条直线折叠,能使其中的一部分与另一部分完全重合,那么这一对象就被认为是关于该直线为轴对称.

对称物体的例子有:

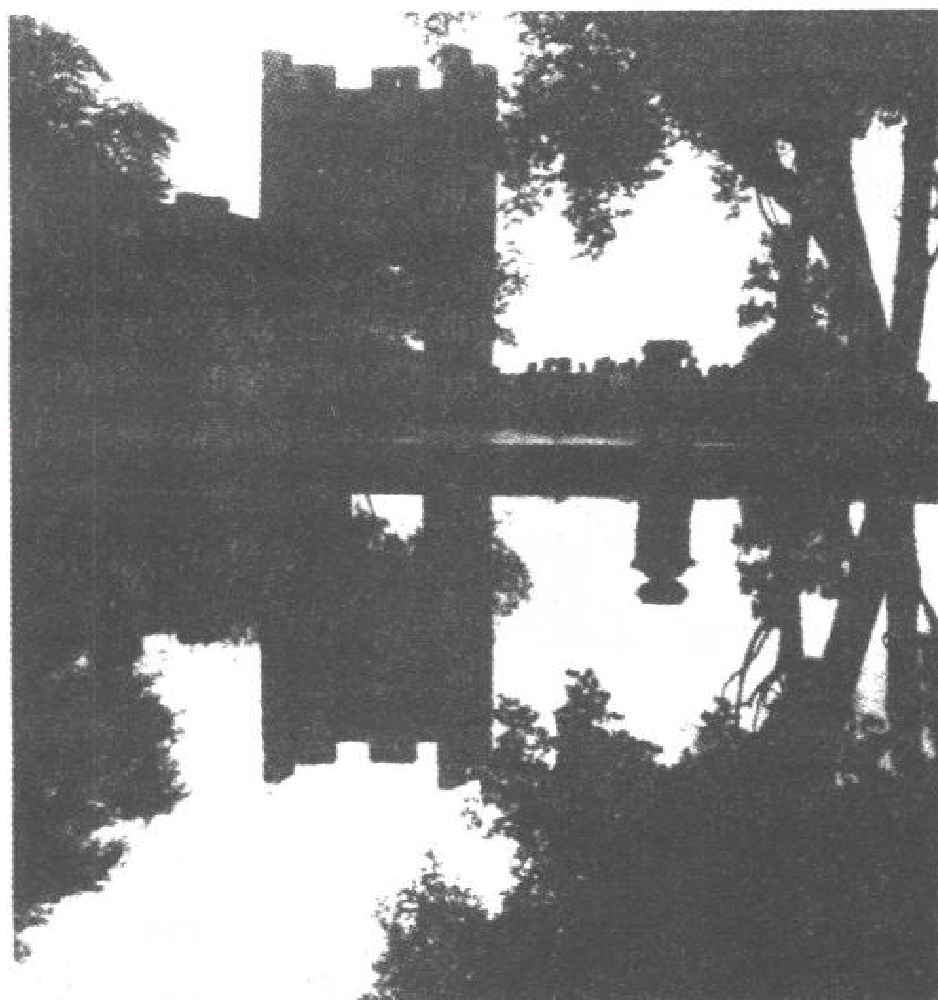
[46]



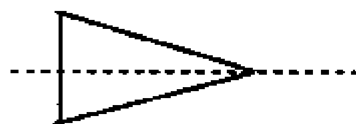
中心对称



两条对称轴



意大利提沃里花园的池塘的映像.



一条对称轴



无数条对称轴

在代数中,一个函数的反函数(对称的像)能够由改变 $X$ 和 $Y$ 坐标的位置来实现.用相应的方程可以绘制出一个函数和它反函数的图象,它们是关于直线 $y=x$ 为对称的.

## 对称和运动

对称这一术语,有时也用在数学的关系上.例如"="的关系[47]具有对称性,因为 $a=b$ 与 $b=a$ 两者同时保持正确.但关系"<"却不是对称的,因为 $a<b$ 与 $b<a$ 不可能都正确.

运动与对称很少有联系.不过,观察运动物体的路线,如果两个物体的对称被证实,那么通过其中一个物体运动的线路就能预测另一个物体的运动线路.进而观察一只四脚动物的实际



运动,它的脚跑动的位置开始时如上图所示,而当它到达全速时,它的前脚是平行的,后脚也一样,此时运动呈轴对称.



对于此,重要的是其运动的位置与原先离开了180°.

研究表明,人类的跑动也跟动物一样,有时会采用一种简单的对称形式.上述发现目前已被应用于带脚的机器人的设计之[48]中.

# 素数与整除性检验

发现素数的日期可以追溯到远古的年代.埃拉托斯散(Eratosthenes,公元前 275—194)创造了一种素数的筛法,用它可以求出比希望数小的所有素数.欧几里得(公元前 300 年?)证明了没有最大的素数.今天,数学家和计算机学家用计算机来判断某数是否素数.被发现的最大素数的纪录不断被刷新.眼下的纪录是 $2^{859433}-1$①,这是斯洛文斯基于 1993 年发现并证实的.斯洛文斯基是应 D·克兰道尔的请求对它进行验证的.确定素数的算法还被应用于其他领域,诸如用计算机处理巨量的资料、气候预报等.

## 5661 被 6 整除吗?

整除性检验是回答有关数的因子这类简单问题的一种快速工具.下面是一些便捷的心算检验法:

**——怎样知道一个数被以下的数整除?——**

2——如果是一个偶数,也就是说,以 2,4,6,8 或 0 为结尾.

3——如果该数的数字和被 3 整除.

4——如果该数的后两位所表示的数被 4 整除.

5——如果数的末尾数字是 0 或 5.

6——如果数同时满足对 2 和 3 的整除性检验.

8——如果该数的后三位所表示的数被 8 整除.

9——如果该数的数字和被 9 整除.

10——如果数的末尾数字为 0.

---

① 译者注:——据新华社洛杉矶 1998 年 2 月 12 日电称,美国加州州立大学的 19 岁学生 L·克拉克森,在计算机上通过 46 天的计算终于找到了迄今为止最大的素数,该数为 $2^{3021377}-1$,是人们发现的第 37 个默森素数.

11——求出偶位的数字和及奇位的数字和,如果以上两者的差能被 11 整除,则该数也被 11 整除,反之亦然.

[49] 12——如果数同时满足对 3 和 4 的整除性检验.

# 爱因斯坦信手所写的符号

下图是非常难得的，它既可以看到一个伟人的实际手迹，又可以感受一个天才在工作中的思维过程．爱因斯坦一生的工作都与光、时间、空间、能量、物质、引力以及他们之间相互关系打交道．这里是一幅爱因斯坦在黑板上工作的复制品，引自他1931年在牛津大学时的讲演．

[50]

## 帕斯卡三角形的一些性质

在帕斯卡三角形中,对角线(图中虚线)上部分数的和,等于最后一个数的下面一行左下方位置上的那个数.例如,从1到36的三角形数的和,等于最后一个数36的下面一行左下方位置上的那个数120(图上打圈的数).

自然数 1 =1
三角形数 1 1 =1 1+1=2
四面体数 1 2 1 1+2=3 斐波那契数
四维空间的四面体数 1 3 3 1 1+3+1=5
五维空间的四面体数 1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 (120) 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 [illegible] 495 220 66 12 1

上述方法对所有的对角线——自然数对角线、三角形数对角线、四面体数对角线、四维空间四面体数对角线,等等——都保持正确.

斐波那契数也出现在图示的帕斯卡三角形中①.显然,帕斯卡本人当时并不晓得这些.事实上,上述性质在19世纪后期之前大概还没有人注意到.[51]

① 原注:更多的信息可见第289~290页.

# 钟　　摆

想必读者看过爱伦坡的小说《地狱和钟摆》和U·伊可的《傅科摆》,作品中所提到的摆,是大家房间里的钟或自然博物馆里显示地球运动的巨大的摆的始祖——它全然使我们想起那波动的,不变的,而且几乎是催眠式的运动.

摆的历史始于16世纪后期.有一天,年轻的伽利略被大教堂圆顶上的大古铜吊灯的摇荡迷住了.他一边数着自己脉搏的跳动,一边看着吊灯的来回运动.他注意到吊灯来回的时间几乎是一样的,与荡动幅度的大小无关.这种早期的观察引发了他对摆的性质的研究.在此后几年,他发现了:

1) 摆的周期(来回荡动一次)是不依赖于荡动的振幅的.

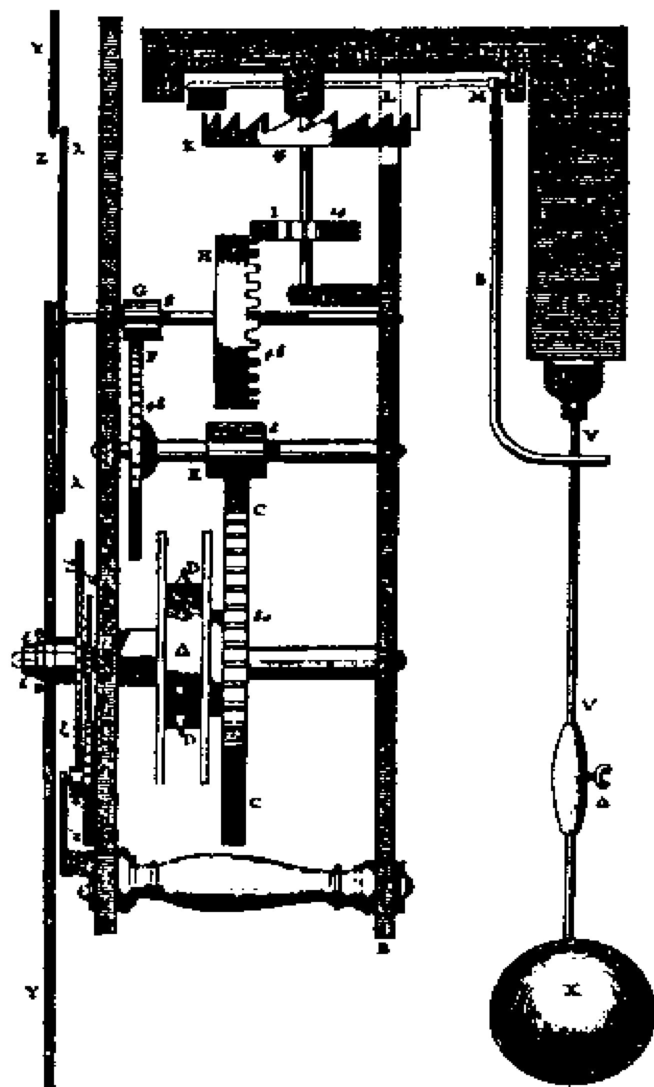
2) 摆的周期不依赖于摆锤的质量(摆锤可由木头或铅做成,它不会影响周期).

3) 当绳子的长度已知时,摆的周期便能确定,而且此后可用以测量时间.

4) 把摆绳的长固定到某个需要的长度,即可得到所需要的周期.

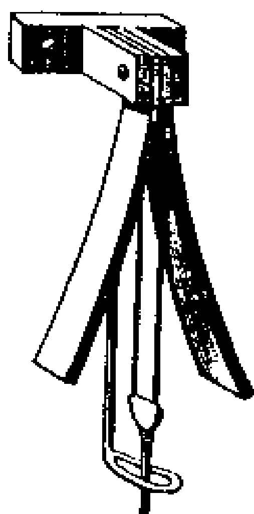
16世纪中叶,荷兰科学家惠更斯探索了摆的运动.他得出摆的周期不依赖于摆动的振幅是不尽确切的.他知道其间存在着细微的变化.他希望使摆的运动精密化,以使其达到完全等时性的效果,从而用于钟的开发.他发现问题的解决有赖于对摆线作更深入的研究(摆线是这样一种曲线,当一个圆沿直线平稳滚动时,圆上一个固定点所走的路线形成的曲线).在惠更斯的发现之前,人们总是把摆的运动与圆弧相联系.通过惠更斯在数学方面的工作,终于解决了摆绳的长度问题,即要使制造出的摆荡 [52]

[53] 动的路线为摆线.据此,他终于能造出世界上第一台精密的摆钟.



以上摆的图解引自惠更斯 1673 年的著作.

以下图示了摆线的钳口,这是惠更斯为了使摆能在一条摆线弧上荡动而设置的.



惠更斯的探索也针对摆的不同类型,这些类型的摆有着各种不同的用途.其中的一些是:

● 旋转摆

——它的摆动像运动或旋转的轮子,实际上不能感觉到.

● 扭转摆

——它的相应于垂直绳的部分由金属带做成.当它卷起来的时候便成为一个弹簧.这种摆用在400天的钟里.

● 双线摆

——由地震探测工作者L·克洛文开拓.双线摆对于测量朝地心方向的变化非常有效.双线摆可以证明地球绕自身的轴转动(自转)不是固定不变的,它时时都有轻微的增快或减慢.这些变化是由于太阳和月亮对地球的引力牵动所致.

● 傅科摆

——由法国科学家J·傅科于公元1851年开拓的.这种摆在自然历史博物馆里通常可以找到(就像在旧金山的金门公园里那个一样),它有一个巨大的摆锤.傅科摆能够证明地球的转动,当地球自转和绕太阳运转时,摆的摇动面的方向都将出现相应的变化.

**用摆作实验**

1) 变更摆摇动的高度以观察周期的变化.

2) 变更摆绳的长度并观察周期怎样改变.

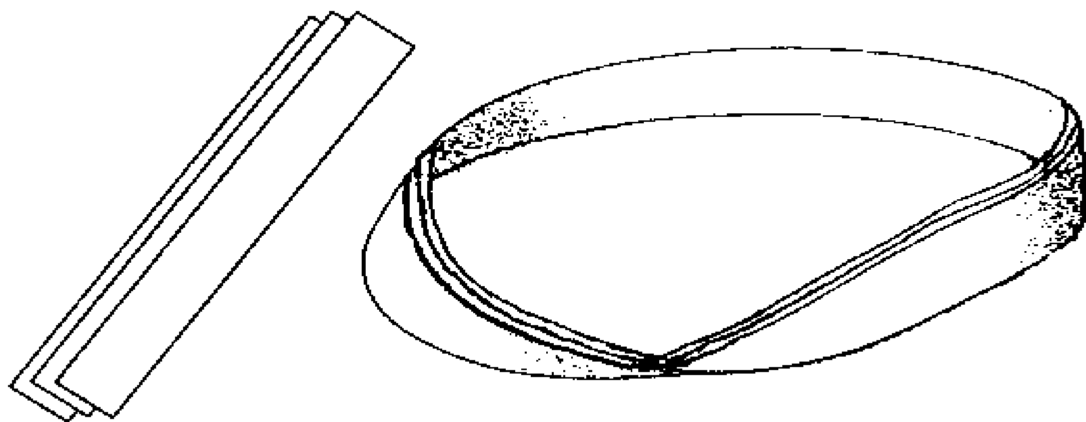
3) 如果你能作出一个等时性的摆,试对不同的摆绳长度加以观察.

4) 证明摆锤质量的改变不会影响周期.

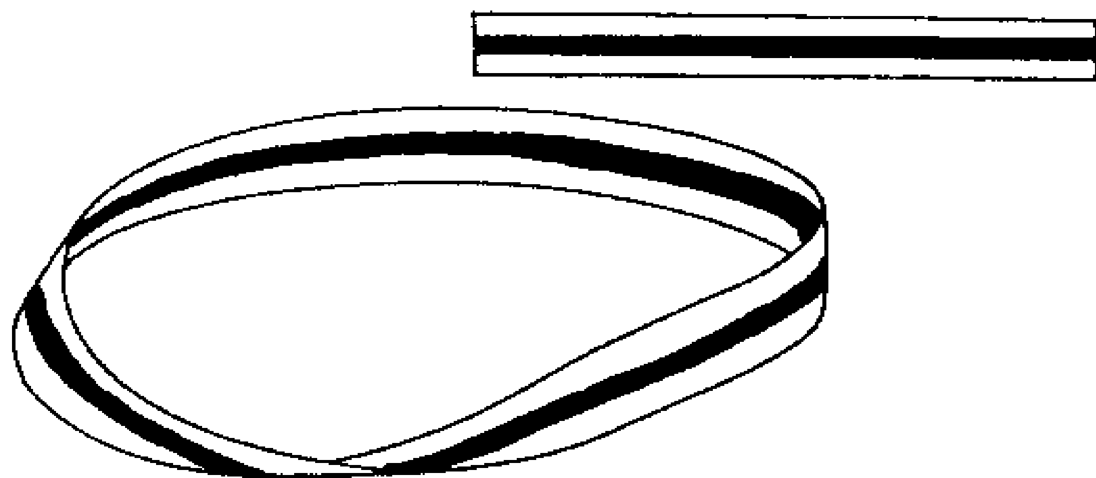
[54]

## 三层的莫比乌斯带

自1848年莫比乌斯提出他那单边单面对象的模型以来,数学家和数学的爱好者们便经常"品玩着"莫比乌斯带.他们的发现与原先的莫比乌斯带同样地令人迷惑.下面是其中的两种模型,它们会产生同样的结果.



上图中的模型是由三条宽度相等的纸带构成.中间的带具有不同的颜色.把三条带合在一起,同时扭转半圈,然后把它们的端头依次胶接在一起,一个三层的莫比乌斯带便做成了.当该模型松开时,其结果可跟以下模型对照.

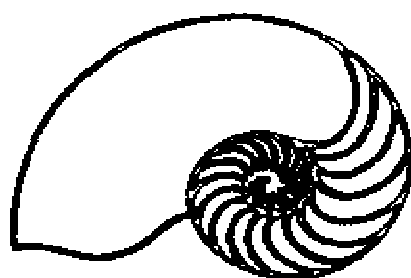


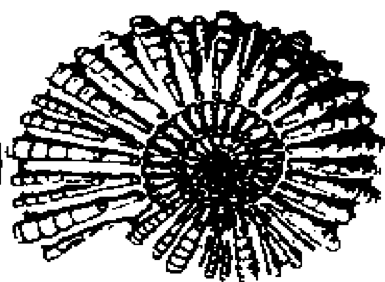
上面模型是由一条宽的纸带构成.它的中央两面都涂上一条宽厚的色带.色带的宽度为带子宽度的三分之一.现将其扭转半圈并将端头胶接在一起,形成一条莫比乌斯带.然后用一把剪刀沿着色带的边剪开.试将你的结果与前面的模型对照. [55]

# 来自大海的数学宝藏

有道是海洋是生命的摇篮.在大海中与在陆地上一样,生命的形式成为数学思想的一种财富.

人们能够在贝壳的形式里看到众多类型的螺线.有小室的鹦鹉螺和鹦鹉螺化石给出的是等角螺线.

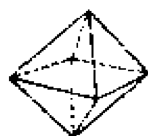

有小室的鹦鹉螺


鹦鹉螺化石

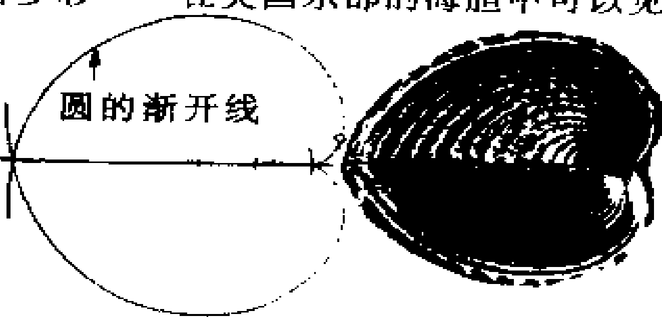

海狮螺

海狮螺和其他锥形贝壳,为我们提供了三维螺线的例子.

对称充满于海洋——轴对称可见于蛤蜊等贝壳、古生代的三叶虫、龙虾、鱼和其他动物身体的形状;而中心对称则见于放射虫类和海胆等.



放射虫类和八面体

几何形状也同样丰富多彩——在美国东部的海胆中可以见到五边形,而海盘车的尖端外形可见到各种不同边数的正多边形;海胆的轮廓为球状;圆的渐开线则相似于鸟蛤壳形成的曲线;多面体的形状在各种放射虫类中可以看得

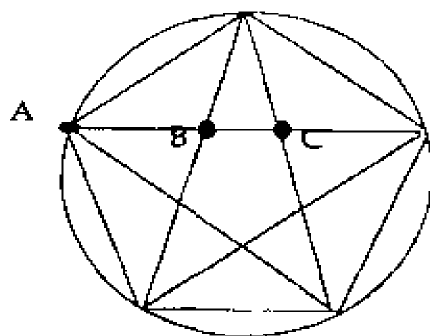


圆的渐开线与一只鸟蛤壳

很清楚;海边的岩石在海浪天长地久的拍击下变成了圆形或椭圆形;珊瑚虫和自由状水母则形成随机弯曲或近乎分形的曲线.

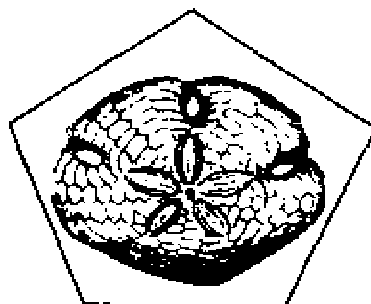
黄金矩形和黄金比也出现在海洋生物上——无论哪里有正五边形,那里我们就能找到黄金比.在美国东部海胆的图案里,就有许许多多的五边形;而黄金矩形则直接表现在带小室的鹦鹉螺和其他贝壳类的生物上.

在海水下游泳可以给人们一种真正的三维感觉.人们能够几乎毫不费力地游向空间的三个方向.




当五角星形内接于正五边形时便创造出黄金比.形成黄金比的点族(例如 $A, B, C$)比比皆是 ($|AC|:|AB| = |AB|:|BC|$).





海胆的五边形

在海洋里我们甚至还能发现镶嵌的图案.为数众多的鱼鳞花样,便是一种完美的镶嵌.

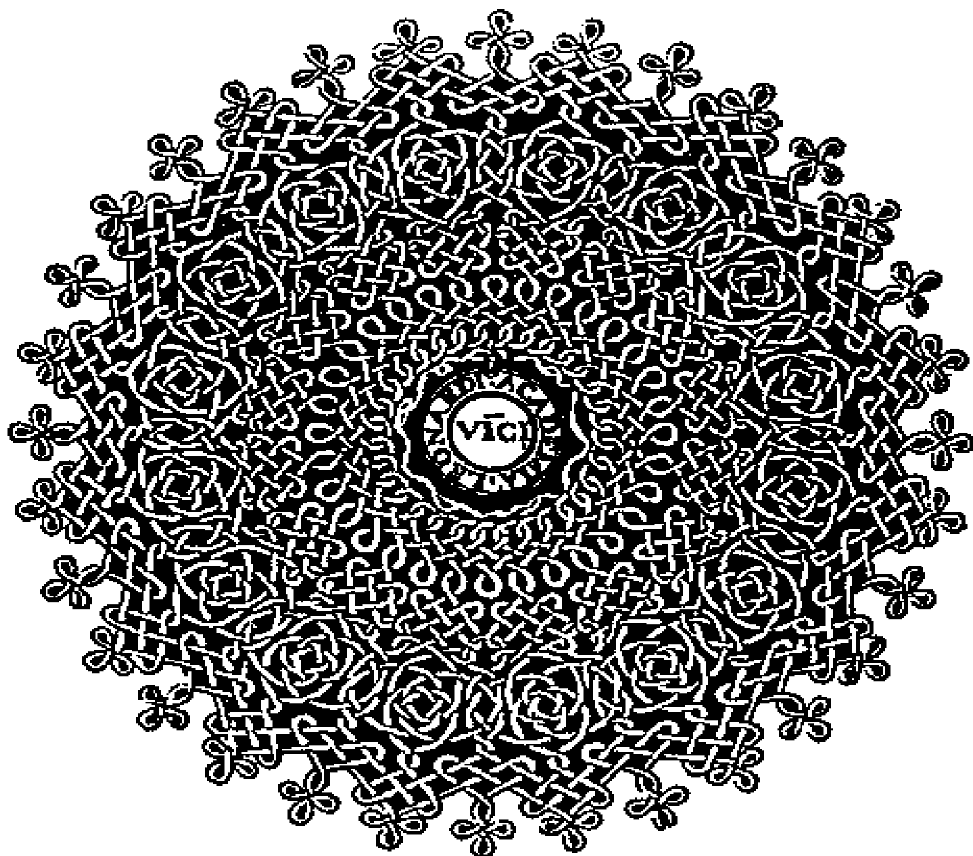
海洋的波浪由摆线和正弦曲线组成.波浪的动作像是一种永恒的运动.海洋的波浪有着各种各样的形状和大小,有时强烈而难于抗拒,有时却温顺而平静柔和,但她们总是美丽的,而且为数学的原则(摆线、正弦曲线和统计学)所控制.最后,难道没有理由认为海中的沙曾经激发了古代人形成了无限的思想?当我们对每一个数学思想进行深层次研究的时候,会发觉它们是复杂和连带的.而每当在自然界中发现它们时,便就获得了一种新的意义和联系.



鱼鳞的镶嵌图案

## 数 学 的 结

初看之下很多人会想，结没有什么特别的地方，只是用来保持东西牢固罢了，就像绑鞋带或为小船装索具那样．但是在数学的世界里却有一门叫做纽结理论的完整领域，而一些新的发现使该理论与物理学世界直接联系在一起．



几个世纪来，结一直被艺术家们所运用．上图是达·芬奇创造的一种错综难解的结的一部分．

结的理论是拓扑学的一个非常新近的领域．它起源于19世纪并与克洛文的思想相联系．克洛文认为原子是一种在以太中存在的结的漩涡，而以太则是充满空间的看不见的流体．他感到他能对这些结进行分类，并整理出一个化学元素周期表．尽管他的理论无法被证明是正确的，然而却促使了纽结理论成为今天

数学研究的热门课题.

[58]

人们每天所作的大多数结与数学的结有什么区别呢？数学的结是一种没有端头的圈，这种圈不能形成圆．数学家们试图对结进行分类，以便人们能够识别各种不同的结．下面是其中的一些重要想法，尽管它远不是系统的：

● 结不可能在高于三维的空间存在.

● 最简单的和可能的结是有3个交叉的三叶形结．它分为左手和右手两种样式，它们互为镜像.



三叶形结

● 只存在一种有4个交叉的结.

● 只有两种类型具有5个交叉的结.



从左到右：第一个为有4个交叉的结，第二个有5个交叉，第三个有6个交叉，第四和第五个有7个交叉.

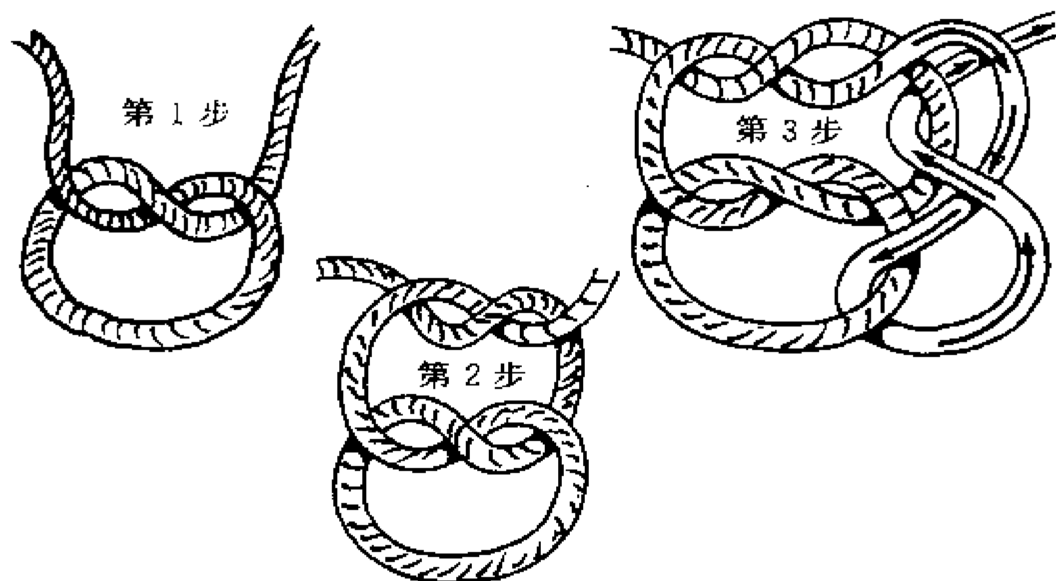
● 有13个交叉或不多于13个交叉的结，不计镜像，其总数远远超过12000种.

● 观察下图．那里的两个结是互为镜像的．你可能会这样想：它们既然是互反的，那么把它们放在一起岂不可以抵消？试试看！（它们简单地互相穿过并保留不变.）



[59]

● 现在看一种叫"契法洛结"的假结(下图).当绳子两头拉直时会出现什么情况呢?(结一个一个地脱开了!)




结的实际模型最初是为了研究它们自身而创作的.检验两个结是否相等,只要将其中一个模型用手操纵并力图使它改变成为另一种形状.如果这种变形做得到,就能鉴定它们相等;如果做不到,就不能得出相等的结论.

在拓扑学领域对结的研究主要是尝试解析它的各种性质.今天计算机已经进入了图画的领地,几何巨型机的设计[1]就是应用先进的计算机工艺,对数学的方程和形式产生一种三维的视觉图象,就像环面的结和分形一样.

[60]

数学家们还发展了其他结的分类和检验的办法[2].现在,他

---

① 原注:一个国际的数学家和科学家团体,他们经由电信网络在同一台巨型计算机上工作,用纯数学的方法去解决几何中富有挑战性的问题.《科学新闻》133卷第12页,1988年1月2日发布.

② 原注:一个"结"如能变形为无扭转、无自交的形式,即变为一个圈,那它就不是结.

们只要看一下这些结的二维影子，便能推测并写出一个方程来描述它①.

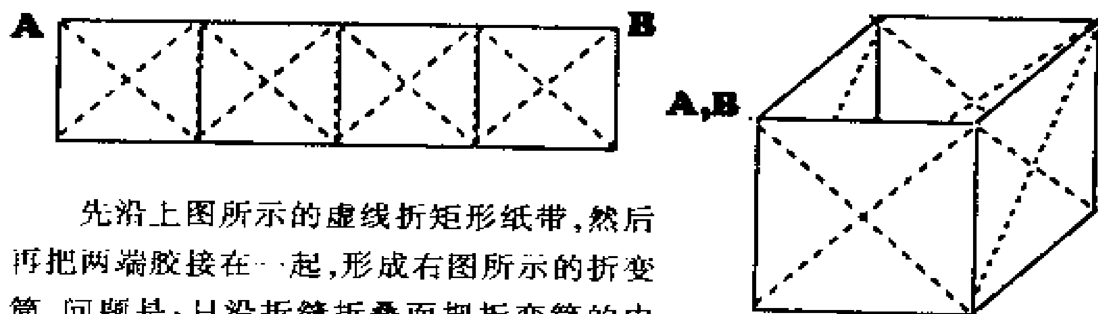
许多近代的内容与结的理论有着令人兴奋的联系.例如分子生物学、分子物理学等等.在这些领域，科学家们正用数学家在结理论方面找到的新的技巧来研究 DNA 的结构.研究发现，一股 DNA 带能够形成圈或结.据此，科学家们能够判定一股 DNA 带是否会出现在另一股的前面.他们还制定出一系列连续的步骤，依此将 DNA 带变形为一种特殊的模式，从而预测未观察到的 DNA 结构.上述发现对于遗传工程学大有帮助.类似地，在物理学里纽结理论对于研究类同于结那样的粒子的相互作用也大有帮助.

结的结构可用于描述不同的可能出现的交互作用.而这些正是这门脱颖而出的数学领域的发现和应用的开始. [61]

① 原注：第一个这样的方程是 J·亚历山大(John Alexander)于 1928 年作出的.在 80 年代，V·琼斯(Vaughan Jones)在结的方程方面又作出了另外的发现.《科学新闻》133 卷第 329 页，1988 年 5 月 21 日发布.

## 折　变　筒

许多数学思想是偶然间发现的，可能当时你所探索的是一个完全不同的问题——或一个谜题，或一个游戏，甚至于用一张纸做一些不足称道的东西．6－6 折变形的发明者 A·斯通(见第 47 页)就是这样，在研究折变形的过程中发明了另一些使人迷惑不解的物体，其中之一就是 4－折变筒．它看起来像一个扁平的折变形，打开后成为一个筒．图中的虚线表示折缝．斯通发现这个筒能够沿折缝折曲而将内部翻转到外面来．




先沿上图所示的虚线折矩形纸带，然后再把两端胶接在一起，形成右图所示的折变筒．问题是：只沿折缝折叠而把折变筒的内部翻转到外面来．

折变形的其他一些种类也相继发现，如 3－4 折变形(三面四边)，4－4 折变形，6－4 折变形等等．

折变形的创作原是为了娱乐和新奇．然而它那令人迷惑的性质却促使数学家们花费大量的时间去发现一些新的折变形、折变筒，以及这些新角色的性质．虽说目前还只停留在发明或发现上，谈不上什么实际用途，但客观上还是为人们提供了一些有趣和错综复杂的操作，从而提供了智力上的练习．

[62]

“在我年轻的日子里，我一有空暇（我一直在想我应该更加有效地利用它），总是以制作幻方而自娱.”

——B·富兰克林

# 富兰克林的幻直线

| 52 | 61 | 4 | 13 | 20 | 29 | 36 | 45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 3 | 62 | 51 | 46 | 35 | 30 | 19 |
| 53 | 60 | 5 | 12 | 21 | 28 | 37 | 44 |
| 11 | 6 | 59 | 54 | 43 | 38 | 27 | 22 |
| 55 | 58 | 7 | 10 | 23 | 26 | 39 | 42 |
| 9 | 8 | 57 | 56 | 41 | 40 | 25 | 24 |
| 50 | 63 | 2 | 15 | 18 | 31 | 34 | 47 |
| 16 | 1 | 64 | 49 | 48 | 33 | 32 | 17 |

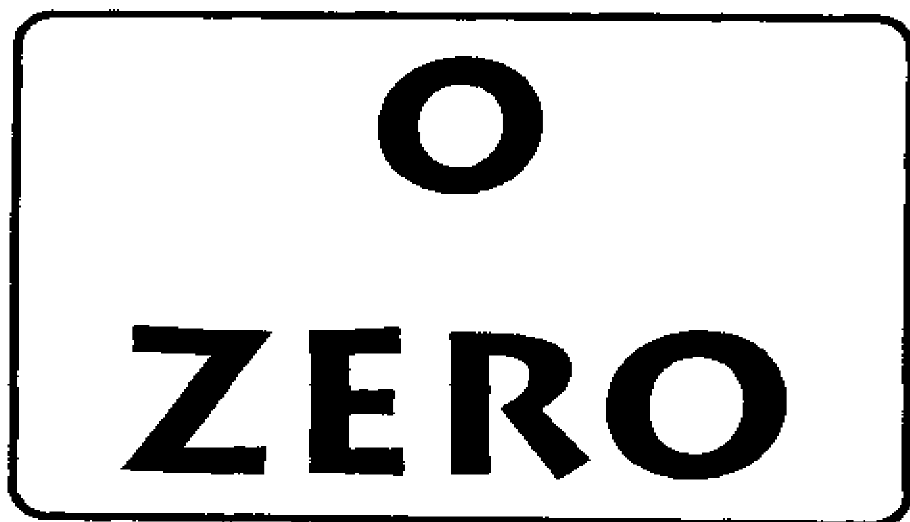
20 世纪初，建筑师 C·F·布拉顿发现了如何应用幻方去构造一幅令人喜爱的艺术图案.在幻方中依次连接它的数，一种对

称的图案便被创作出来.人们称之为“幻直线”[①].上图所示的是[63]由富兰克林幻方所形成的幻直线.

① 原注:由定义知,幻直线不是一条直线,它相当于一系列的线段,这些线段的两端依次连接幻方中的数,并因之形成一种对称的图案.

## "0"和"零"的创始

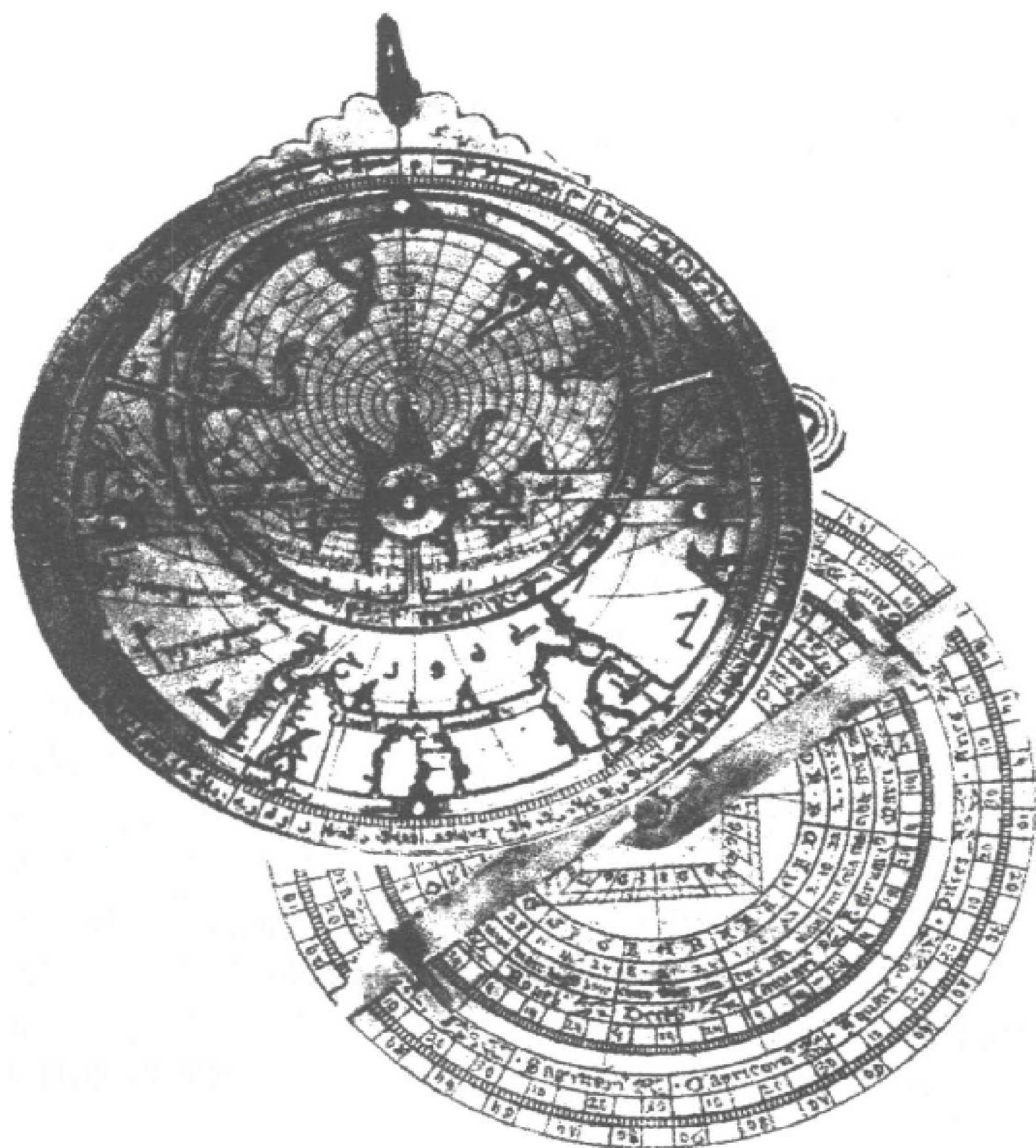
我们经常采用一些假定的符号和词语.数学中的大量符号和术语,是经过千百年演化而形成并为人们所逐渐习惯了的.词"零"和符号"0"提供了这类演化最好的例子.零的概念的实际演变有着它自身的历史,而我们这里只是概略地讨论它的词和符号的历史发展.




符号"0"最初出现在公元870年前后印度人的著作."0"有许多说法——如数零(英语 zero),数轴的始点,我们数体系的位置持有者,对于加法能使之得到本身的元素,等等.起初,印度人用词"sunya",即"空白"和"缺乏"的意思.到了公元9世纪,则用它作为数体系的一个位置持有者.阿拉伯人把这个词翻译到阿拉伯时写为"as - sifr".到了13世纪,这个阿拉伯词"sifr"由内莫雷留斯介绍到德国,写为"cifra".这个词后来译为拉丁文"zephirum".在意大利,该词变成"zeuero",它已经很像英语中的词"zero"了,而"zero"译成中文就是"零". [64]

# 星　　盘

星盘,最早由希腊人发明,后经伊斯兰人改良,用以测量太阳或其他星体的仰角.使用时常与星图配合,通过若干推算便能



星盘——怀表和星辰滑尺.

确定有关日出、日落、纬度、祈祷的时间以及伊斯兰朝圣者前往圣地麦加[1]的方向. [65]

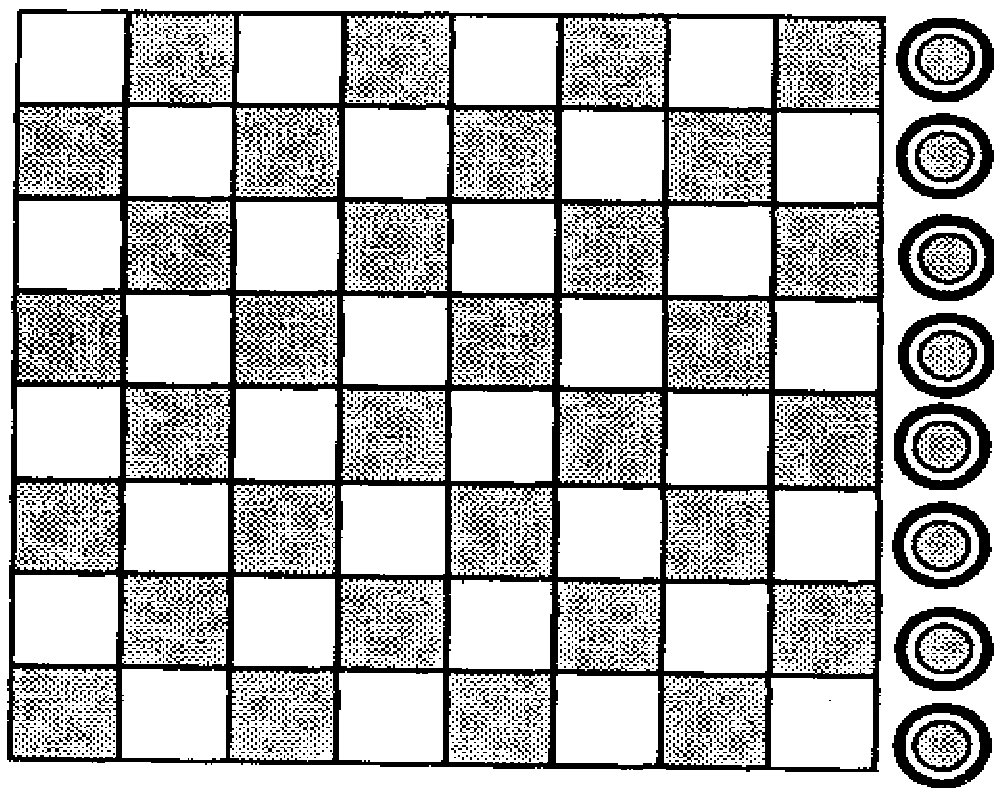
① 译者注:麦加位于沙特阿拉伯西部,相传为伊斯兰教创始人穆罕默德的诞生地,伊斯兰教徒尊为圣地.

## 八个棋子的谜题

这个古老的谜题，几年前曾经过改造并制成商品出售．8个棋子放在64格的棋盘上的方法超过了四百万种．

**8个棋子的谜题**

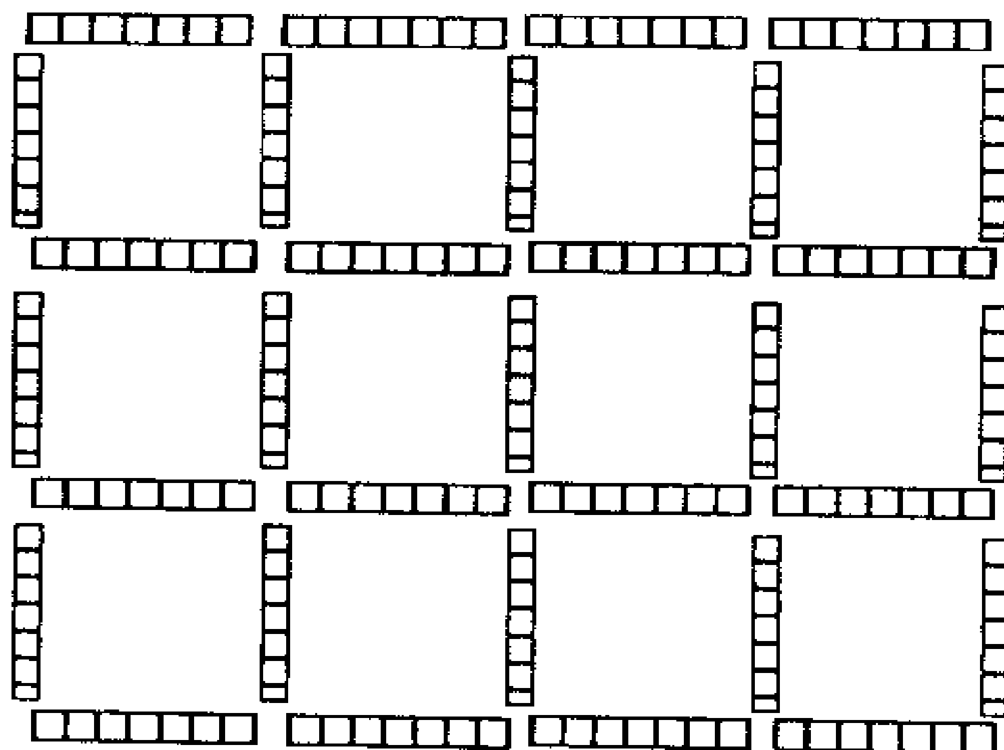
把8个棋子放在一个棋盘的格子上，使得没有两个棋子摆在同一行、同一列或同一对角线上．



 (其中的一种解答见附录)

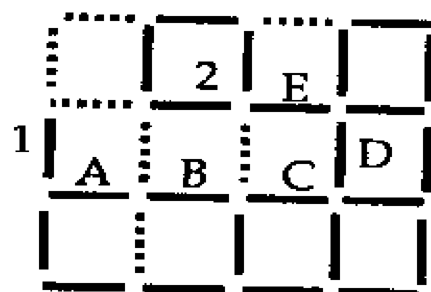
# 棒　条　游　戏

棒条游戏妙在任何地方都可以玩．人们无须专门的棋盘或棋子．但游戏时拿棒子却需要一双敏锐的眼睛．游戏开始时有31根小棒排成下图所示的样式：



两人轮流拿棒子，每人都可以从中拿走他（或她）想要拿走的小棒，只要它们是彼此邻接在一起的，不管多少根或多少长都可以．

例如——




由于棒1和棒2不邻接，所以不能直接同时拿掉它们．但你可以这样拿：先拿走1，然后依次拿走A，B，C，D，E，而后拿走2．

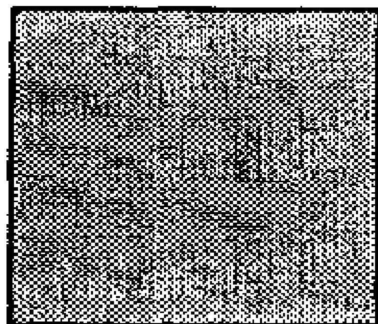
谁拿走最后一根小棒就算谁赢.

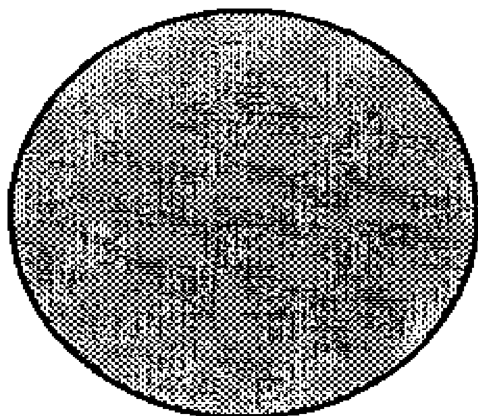
[67]　但愿你能玩得愉快!

# 圆帮了狄多女王的忙

从威尔吉的罗马史诗，我们知道了狄多女王的故事．她是泰雅王的女儿，在她的兄弟谋杀了她的丈夫之后便逃往非洲．在那里，她乞求当地土著雅布王给她一些土地．出于对她请求的疑虑，雅布王问她希望有多大的土地．她回答说，她所要求的只是一张犍牛皮所能围起来的地方．由于这似乎是一个很微小的请求，所以雅布王答应了她．

作为一个精明的女人，她把犍牛皮切成细细的条子，并决定用它围出一个最大的面积，即围成一个圆．在这上面她建立了拜萨（意为牛皮）城，此后即以迦太基闻名．





与一个圆等周长的正方形，它所围的面积比圆的面积小．

**证明：**

假定正方形的周长为 $x$，则它一条边的长为$\frac{x}{4}$，而它的面积为：

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{16}.$$

一个周长为 $x$ 的圆,其直径等于$\frac{x}{\pi}$,从而其半径为$\frac{x}{2\pi}$,面积为$\frac{x^2}{4\pi}$.

[68] 因此,正方形面积$\frac{x^2}{16}$<圆面积$\frac{x^2}{4\pi}$.(注意:$16>4\pi$)

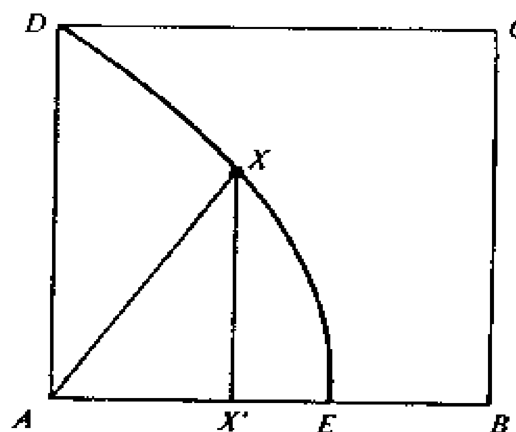
# 割圆曲线——解三等分角和化圆为方问题的曲线

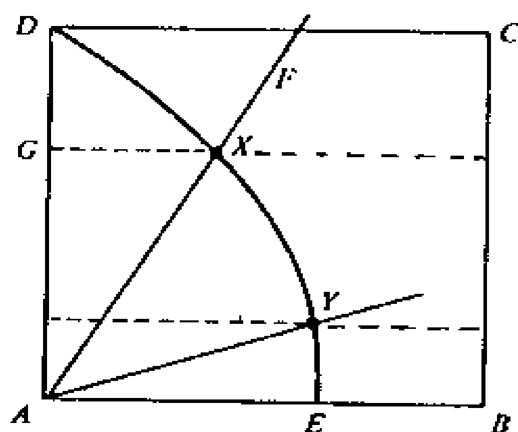
割圆曲线是在研究解古代三大作图问题(化圆为方、三等分角和倍立方)时的一种数学成果.大约在公元前420年,希庇亚斯发现了割圆曲线,并发现它可以用于解三等分角和化圆为方两个问题.

**割圆曲线可由以下方法形成——**

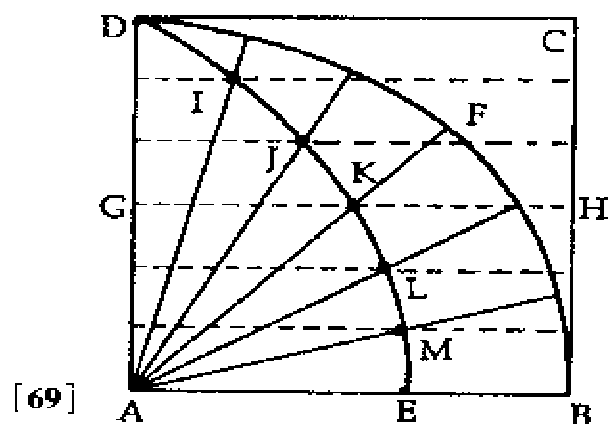
作一个正方形,它的底边为 $AB$.让 $AB$ 从底边的位置开始沿反时针方向,以一个固定的角速度绕 $A$ 点旋转.另一方面,平行于 $AB$ 的线段(其端点位于 $AD$ 和 $BC$)也从 $AB$ 开始,以一个固定的线速度运动.这两条运动线段的交点所形成的便是割圆曲线.以下的比总是相等的:

$$\frac{m\angle XAE}{m\angle DAB}=\frac{|XX'|}{|DA|}.$$



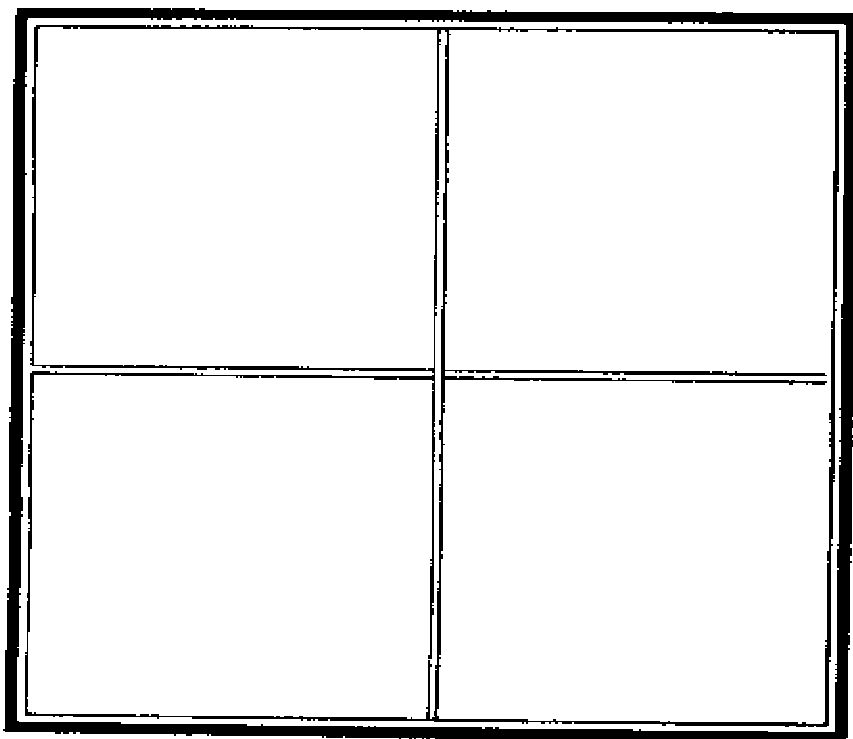
[69]




左图说明了与割圆曲线上 $D,K$ 和 $E$ 相联系的一些点.水平的虚线段表示边以固定的线速度运动,而沿圆弧 $\overset{\frown}{DFB}$ 所引的半径表示线段以固定的角速度运动.它们的交点 $D,I,J,K,L,M,E$ 是割圆曲线上的点.

# 卡洛尔的窗户谜题

作为数学家的 C·道奇森，跟作为《阿丽丝漫游奇境记》和《阿丽丝穿越镜子》的作者 L·卡洛尔，两者一样知名．下面是他所发现的众多谜题之一：



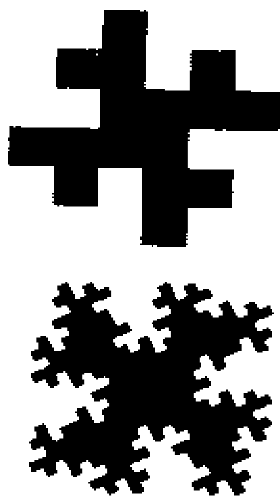
窗户透过的光线比想要的多得多．要怎样去改变它才能使得依旧保持正方形但只给出一半的光线？不能用布幕或其他的东西去覆盖，而它的高度和宽度也必须保持原来的二英尺．

（解答见附录）

[70]

## 分形时间

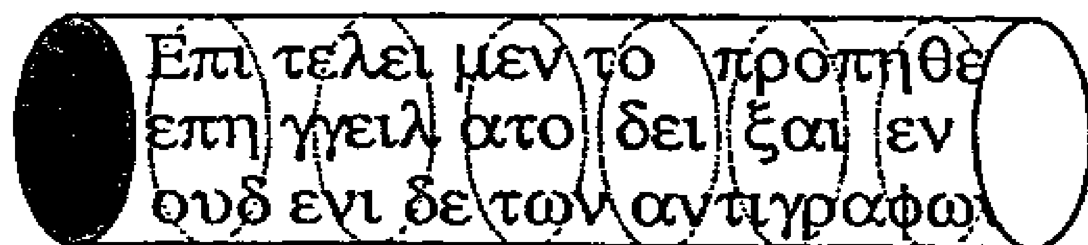
我们常常会想,无生命的东西是固定不动的,然而像风、海浪、河流甚至于玻璃、岩石、塑胶等等都会有一定的运动.事实上,任何物质都在动,只是有些运动是发生在分子级的水平上,我们看不见或无法直接测量到而已.此外,物体的合成也将引起运动(它们的分子自身的运动或再结合),尤其当它们处于外部的强制之下时(例如压力、温度、电场或磁场等).今天在工业上研究这类变化非常重要,因为生产出的物品,如塑胶、玻璃、橡皮、生丝等等,有关变化对物品的有效期举足轻重.



在晶体物质中,变化以指数的比率进行.类似地,对于放射性物质,在某一定的时间间隔里以一半的速度衰减.非晶体物质(无定形物质)的分子的变化或移动,则贯穿整个的变化时间,有些是以秒计,而另一些则以年计.这些非晶体物质的重组现象,能够用术语"分形时间"加以描述."分形时间"是基于与分形同样的思想.一个几何分形细微部分的放大,即为其大形状的复制.观察这种形式复制的时间,一个物质分子从重组到出现差异的时间间隔,类似于分形复制过程的步骤,从而时间也类似地依赖于该物质在上述步骤中存在的景象.这样,分形的数学在研究物质变化的过程中便担负了重要的角色,而有关的发现和成果,也将用于工业上,以改进产品的有效期.[71]

# 码 与 密码

对密码的研究延续了若干世纪.一个最早的例子要追溯到古代的斯巴达.那时,斯巴达人用一根木棍和一根皮带书写秘密的消息.皮带螺旋式紧紧地绕在圆木棍上,然后将消息写在带子上.当卷着的皮带打开时,出现在带子上的只是一些毫不相干的连续的字母.要重新得到秘密,只要将它卷在一个大小和形状与原来一样的木棍上就行了.




在随后的一些世纪,出现了许多生动的故事和例子.在这些故事中,一些人致力于创造和设计密码,而另一些人则进行着破译的工作.凯撒有时也用替换字母的办法来密写消息,他是将字母表上的字母往下移一个固定的数.伊斯兰人最早开展有组织的破译.欧洲国家在文艺复兴时期还建立了专门的团体,从事破译其他国家秘密的工作.在14至15世纪间,虽曾有一些这方面的手册和论文,但大部分卓有成效的先进的密码编译工作是在20世纪进行的.这里我们找到了两位著名密码专家威廉和E·

[72] 弗利德门的著作①.



上图引自 R·基普林的故事书《第一封信》.书中"正是这样的故事"一节基普林写道:"这封环绕着象牙的信是不可思议的——其魔力在于它是用古代北欧的文字刻写的——如果你能读懂它,那么你就会发现一些新的东西."这封信实际上用的是一种替换式的密码.

① 原注:威廉和 E·弗利德门两人最初是在远离战场的情况下研究破译密码的.当时威廉是一位遗传学专业的毕业生,E·史密斯(结婚后名字为弗利德门)则毕业于同级的英语专业.1915 年,他们被哥伦比亚的 C·法比恩劝说去参加他的"河岸科学实验室",在专家处作计划工作.一项特殊的计划是:试图证明 F·贝肯是莎士比亚著作的真正作者.这项工作把他们带进了密码研究的领域.在 1916—1917 年冬天,他们热心地钻研了所有能找到的密码文件及点滴信息.虽然弗利德门从事的是无线电编译工作,但因介入了 30 年代的一宗麻醉戒指案而遭到美国司法部的起诉,而威廉在两次世界大战期间为美国政府做了无价的工作.他的作品和书(有些仍为分类信息),超出了那种单纯计算字母频率的老方法,发展了密码领域,发现和应用了富有革命性的破译密码的统计技巧.

在机器和密码之间有着密切的联系.随着密码设计的发展,用机器设码、解码和破译陆续地出现.这些机器能将信息重新加以构造.千变万化的设计在二战中担负着重要的角色.例如,威廉·弗利德门小组破译出日本的"皇家机队"是临时拼凑的,没有什么有效的策略,这就为同盟国提供了无价的信息.在这期间另一些值得注意的成就是:英国数学家图林破译了号称固若金汤的德军"恩尼格玛"码;美国海军破译了日本舰队的电码.时至今日,从报上宣扬的伊朗—康图拉丑闻,表明必须给公共光缆一种高度安全的设计.最近,密码还被用于确保最高级秘密电话的安全(设法打乱电讯的波长).最畅销的小说《玫瑰的名字》中就有用密码交往的情节,该小说还被改编为电影.

[73]

电码、密码或暗号其自身都有一个逻辑问题.对一定类型的问题都有不同的着手和处理的方法.因而了解一些码和密码及其工作原理,对于为数众多的人,一旦遇到类似需要解决的问题自有好处.

前面我们看到斯巴达人是如何使用木棍传递消息的.其实一架打字机键的安排也可以用作密码设计.邮票上小圆点的图案是一种带洞的卡,这种洞是用冲床压出来的,它也是一种码的设计,是由17世纪的C·里契留开发的.将邮票贴在一个表面上看空白的地方,这些洞也将表示该信的一种秘密.T·杰弗逊开发了另一种密码设计,它是圆筒形的器件,上面装有36个轮,每个轮上都带有字母表,其中一个轮的滚动不影响其他轮子.今天,我们已经有了最先进的建码和译码工具,那就是我们手头上的电子计算机,这些现代的工具当由一个专家来使用时,其威力将是无比的.

了解码和密码是怎样创造的,是学习解码和破码的基础.它像解一道数学难题一样,需要坚韧和智巧.从本质上讲,它是一种特殊类型的数学问题.历史表明,解这些问题的目的不仅仅是娱乐,其中许多与战争的转折相联系,另一些则与解决医学和遗

传学的奥秘有关，后者需要洞悉DNA分子链的双重螺旋码.最后，密码及其破解工作都与传递的方式直接关联——无论是破译古埃及的象形文字、创造假情报，或是从外空接收和译解信[74]号，都不例外.

### 密码系统的类型

1）转换式密码

保持消息的原始字母，但以某种系统的方式改变它的位置.如一条消息——Meet Martha on Monday in front of the bridge（星期一在桥前与玛莎会面），我们能够用下面的方式打乱：先把每个词倒写，然后每隔3个字母断开，如下——tee mah tra mno yad nom nit nor ffo eht egd irb.不过这种转换式密码是相当容易破解的.

尝试一种不同的花样.例如：

M T R A M D I R T T B D
EE MA TH ON ON AY NF ON OF HE RI GE

现在先写上面的底行字母，然后再写顶行字母，写后将它们每隔5个字母断开.最后如果不够5个，则用随便的字母充数顶足5个，这样便得到：

EEMAT HONON AYNFO NOFHE RIGEM TRAMD IRTTB D*FGHR*

这种密码现在就变得有点难于破译了！

把你的消息放在一个正方形棋盘格的空格处，这是又一种用于创造转换式密码的方法.接下去是需要设计一条贯穿这些字母的线路.

2）替换式密码

在单字母表里，将每个字母的位置都重新摆放.例如，将字母表里的字母用以下方式调换：打字键调换或用你所选择的方

式打乱——

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |

变为：

| Q | W | E | R | T | Y | U | I | O | P | A | S | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | G | H | J | K | L | Z | X | C | V | B | N | M |

于是，信息——MEET MARTHA ON MONDAY（星期一与玛莎会面）

变为——DTTZ DQKZIQ GF DGFRQN

或用凯撒的方法，将每个字母在字母表上往下移三位，我们得到：

PHHW PDUWKD RQ PRQGDB

用一个关键词是另一种调换的技巧.假定我们选的词是MATH，然后——

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

变为：

M A T H B C D E F G I J K L N O P Q R S U V W X Y Z

于是，信息——MEET MARTHA ON MONDAY

变为——KBBS KMQSEM NL KNLHMY

多字母表的调换比单字母表更常用于设置密码消息.而且不同的符号能够表示同一个字母，而同样的符号也能表示不同的字母.这种系统最早由14世纪一位法国的密码专家韦爵纳加以描述.例如——选一个关键词MATH，现步骤如下：

关键词重复——

MATHM ATHMA THMAT HMATH

MEETM ARTHA ONMON DAY*GF*

即把消息内容列在重复的关键词下面（G和F是凑进去的字母）.

码的字母可从左表中查到：

| | ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ |
|---|---|
| A | ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ |
| B | BCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZA |
| C | CDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZAB |
| D | DEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZABC |
| E | EFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZABCD |
| F | FGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZABCDE |
| G | GHIJKLMNOPQRSTUVWXYZABCDEF |
| H | HIJKLMNOPQRSTUVWXYZABCDEFG |
| I | IJKLMNOPQRSTUVWXYZABCDEFGH |
| J | JKLMNOPQRSTUVWXYZABCDEFGHI |
| K | KLMNOPQRSTUVWXYZABCDEFGHIJ |
| L | LMNOPQRSTUVWXYZABCDEFGHIJK |
| M | MNOPQRSTUVWXYZABCDEFGHIJKL |
| N | NOPQRSTUVWXYZABCDEFGHIJKLM |
| O | OPQRSTUVWXYZABCDEFGHIJKLMN |
| P | PQRSTUVWXYZABCDEFGHIJKLMNO |
| Q | QRSTUVWXYZABCDEFGHIJKLMNOP |
| R | RSTUVWXYZABCDEFGHIJKLMNOPQ |
| S | STUVWXYZABCDEFGHIJKLMNOPQR |
| T | TUVWXYZABCDEFGHIJKLMNOPQRS |
| U | UVWXYZABCDEFGHIJKLMNOPQRST |
| V | VWXYZABCDEFGHIJKLMNOPQRSTU |
| W | WXYZABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUV |
| X | XYZABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVW |
| Y | YZABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWX |
| Z | ZABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXY |

YEXAY AKATA HOYOG KMYZM

码字母的设置几乎像在 XY 平面上描点一样.如词 MEET 中第二个的 E,对应上一行词 MATH 中的字母 T,因此要在水平字母表(X 轴)中找出 T,而在垂直字母表(Y 轴)中找出 E,两者的交叉点在左表中为 X,此即所求的码.

还有更为复杂的两个字母发一音的调换,那是将字母配对进行处理.有些密码系统甚至用上了音节、词短语、句子、段落,乃至于专门词汇的码书.

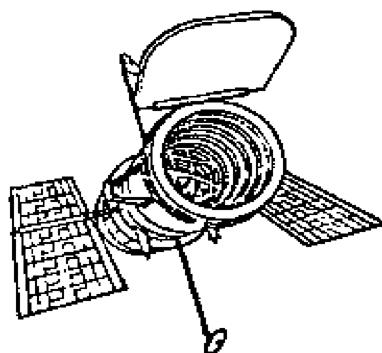
3) 转换式与替换式联合

这种方法非常复杂,但并非不可破译,如果给出的信息有足够的数量.

[75]

## 空间望远镜——数学的错误使哈勃望远镜的目标偏离数兆英里

1990年4月25日,哈勃空间望远镜随发现号航天飞机发射升空.从本质上讲,美国国家航空航天管理局是要在地球大气层上方设置一个天文台.因为虽然地球上有许多用于观测的大口径望远镜,但由于大气层的干扰,限制了它们的功能.哈勃空间望远镜是在真空中操作的,从而能看到更加遥远的空间,而且更加清晰.



哈勃空间望远镜重约25500磅,长45英尺,直径14英尺,能够观察到地球上看不见,波长更大的物体.它以天文学家哈勃(Edwin P. Hubble,1889—1953)的名字命名,是由于哈勃是第一个找到宇宙膨胀直接和可靠证据的天文学家.哈勃还获得了一个公式,用它天文学家可以通过测量星体的速度而估算它与地球的距离.

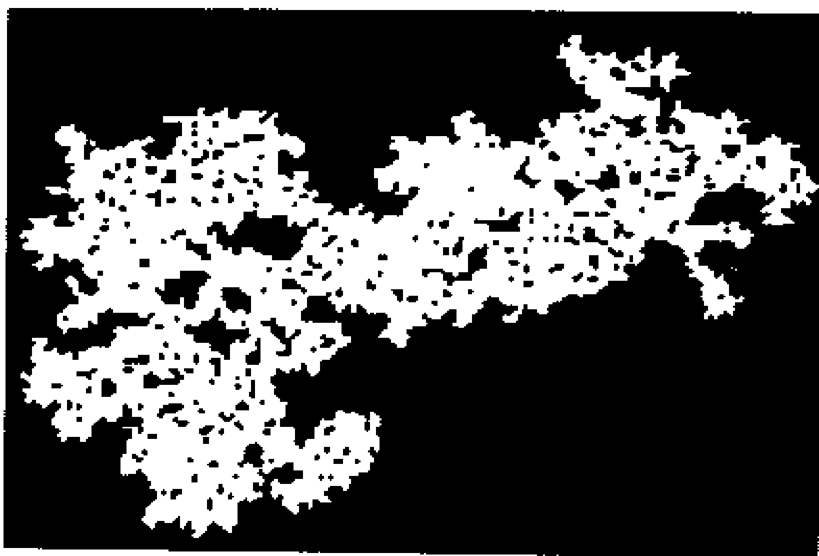
正像早期的水手们用星星来导航一样,哈勃望远镜也依赖于它所观察到的东方导向星.不幸的是,由于一个简单的数学错误而使预期的任务耽误了.原来,天文学家在设计望远镜的指向构造时,采用了1950年制作的星图.然而,从地球上看,经过了40年,星星的位置移动了,从而使哈勃望远镜的目标偏离了数兆英里.认识了这个错误之后,科学家们开始着手调整它们的结构.为了弥补减失的数量,他们加上一个核对量以平衡错误(这在天文学术语中称为半度错误①).

[76]

① 原注:天文学家认为,从18弧分到36弧分比从18弧分回到0更为确实,1弧分等于1度的60分之一.

## 森林火灾的数学

"互相作用的粒子系统"作为概率论的一个分支始于60年代后期,这是一门扩展了的数学疆界.数学的模型和计算机的拟态,是研究各种自然偶发事件蔓延的有效手段.



计算机产生的森林烧毁面积和火势蔓延的图样.

一个分子随意而蜿蜒扩散的集合,其数学模型就像森林火灾那样.描画在棋盘式的方格纸上,每个做记号的小格或单个的或连成一片都表示树.而小格要么被烧过了,要么正在烧,要么没有触及.时间每增加一个量,正在烧的小格以某种概率向与它相邻的四个小格中的一个蔓延,除非该树周围的小格都已被烧过.

正如大家看到的那样,这些模型不像现实的境况那样复杂.类似的模型也可用于研究传染病的蔓延,在这种情况下每个小格表示一个个体,或健康;或生病,或免疫.

数学家们研究不同情况下事件的概率,并用计算机对这种

概率下的过程进行模拟，即使更为复杂的情形也能构造出数学模型．可以断言，这项工作对于了解和驾驭自然现象必将起着重要的作用． [77]

## $\pi$ 的早期估算与表示式

公元前 1700 年，埃及人的 $\pi$ 值为 $\frac{256}{81}=3.16050\cdots$，由此他们的圆面积公式为：

$$A=\left(d-\frac{d}{9}\right)^2.$$

阿基米德(Archimedes，公元前 287—公元前 212)证明了 $\pi$ 是在 $\frac{310}{71}$ 和 $\frac{31}{7}$ 之间，即 3.140845… 与 3.142857… 之间.

在《圣经·旧约全书》列王纪下，Ⅶ－23 中写道：

"他制造了一个熔池，从一边到另一边有 10 腕尺；熔池是圆形的，它的周围约有 30 腕尺；高为 5 腕尺."

我们看到，这里圆的直径给出为 10 腕尺，它的周长为 30 腕尺，由此求出值 $\pi=3$.

在古代中国，张衡(公元前 125 年)给出 $\pi=\sqrt{10}=3.162\cdots$. 公元 1592 年，法国数学家韦达将 $\pi$ 表为：

$$\pi=2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}\right).$$

此后，公元 1655 年，英国数学家 J·瓦里斯将 $\pi$ 表为：

$$\pi=4\cdot\left(\frac{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdot10\cdot12\cdot12\cdot\cdots}{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot11\cdot11\cdot13\cdot\cdots}\right).$$

德国数学家莱布尼兹(Gottfried Leibniz，1646—1716)证明：

$$\pi=4\cdot\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\cdots\right).$$

公元 1873 年，英国数学家威廉·向克斯出版了一本 $\pi$ 估值的书. 书中他把 $\pi$ 的值求到了小数后 707 位. 由于当时没有有效的计算机，可想而知这是一项何等单调乏味的工作. 然而到了

1948年,美国的W·约翰(一位法裔少年)和英国的D·F·费古逊发表了$\pi$的808位的小数值,从而暴露了向克斯的$\pi$值第528位以后是错的.

现代计算机更新了对$\pi$的估值,$\pi$的位数正在不断延续. [**78**]

## 毕达哥拉斯数组

有一种公式能产生毕达哥拉斯数组[1]吗?古希腊人讨论了这个问题.下面是他们的发现:

如果 $m$ 是一个奇自然数,则

$$\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2=\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2+m^2$$

将给出一组毕达哥拉斯数组.

$a, b$ & $c$ — $a^2+b^2=c^2$

5, 12, & 13, 使得 $5^2+12^2=13^2$

例如 $m=17$,把 $m$ 值代人公式得:$145^2=144^2+17^2$.这样,给出的毕达哥拉斯数组是:

$$17, 144, 145.$$

这个公式毕达哥拉斯早已知道.另一种形式是柏拉图设计的,在该公式里 $m$ 可为任意的自然数.

柏拉图的公式是:

$$(m^2+1)^2=(m^2-1)^2+(2m)^2.$$

这里 $m$ 是一个自然数.

上述公式能给出所有的毕达哥拉斯数组吗?

(尝试 7,24,25.由于 $m^2+1$ 与 $m^2-1$ 差 2,所以数组 7,24,25 不可能由柏拉图公式给出,因为 24 和 25 只差 1.)

欧几里得求毕达哥拉斯数组的方法是:

如果 $x$ 和 $y$ 是整数,又如果 $a=x^2-y^2, b=2xy, c=x^2+y^2$,则 $a, b, c$ 是使得 $a^2+b^2=c^2$ 的整数.

[79] 这个公式能产生全部的毕达哥拉斯数组!

---

① 原注:一个毕达哥拉斯数组是一个三数组成的集合,这三数适合于以下方程:即其中两个数的平方和等于第三个数的平方.

# 超出毕达哥拉斯定理一步

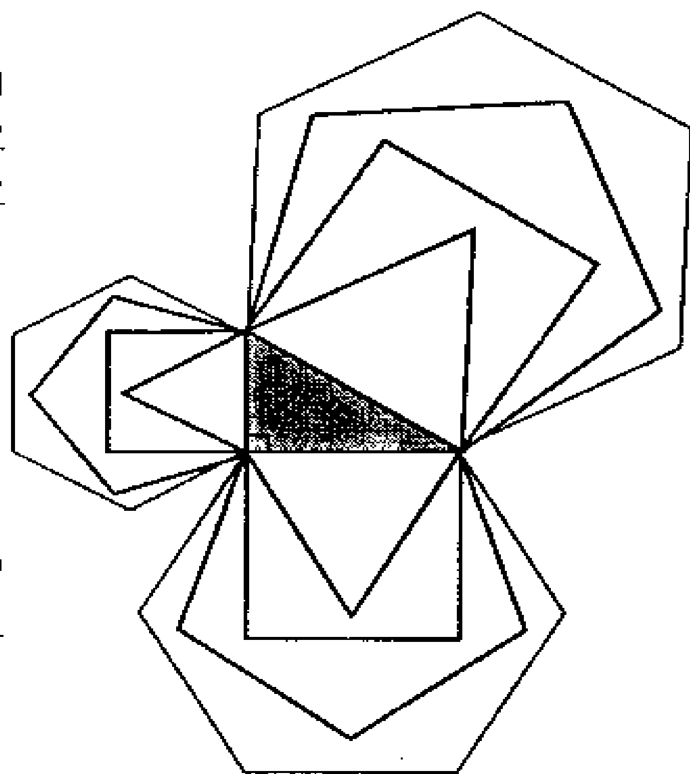
尽管毕达哥拉斯定理已经提出了两千多年，但各种证法和思路依然接连涌现，而且始终令人着迷。有各种各样陈述这个定理的方法。

例如——

给出一个直角三角形，它直角边的平方和等于斜边的平方。

或者——

给出一个直角三角形，立于直角边上正方形面积的和，等于立于斜边上正方形的面积。



现在让我们看一看后一种形式的一种变化。假定把立于直角边上正方形的面积及立于斜边上正方形的面积，用其他相似图形的面积来替代，那么定理依然保持正确。下面是对半圆情形的证明。对于其他的相似图形总能证明吗？

半圆 $A$ 的面积是：

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi a^2}{4}.$$

半圆 $B$ 的面积是：

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{\pi b^2}{4}.$$

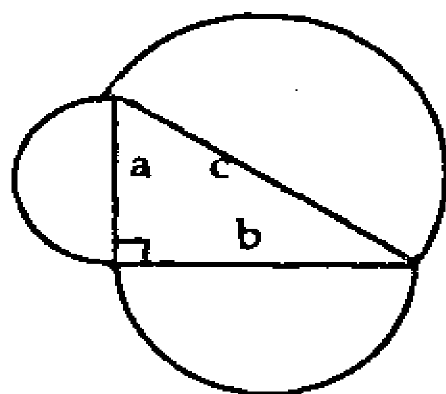
半圆 $C$ 的面积是：

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2=\frac{\pi c^2}{4}.$$

$A,B$ 面积的和是：

$$\frac{1}{4}(a^2+b^2)\pi=\frac{1}{4}c^2\pi.$$

[80]

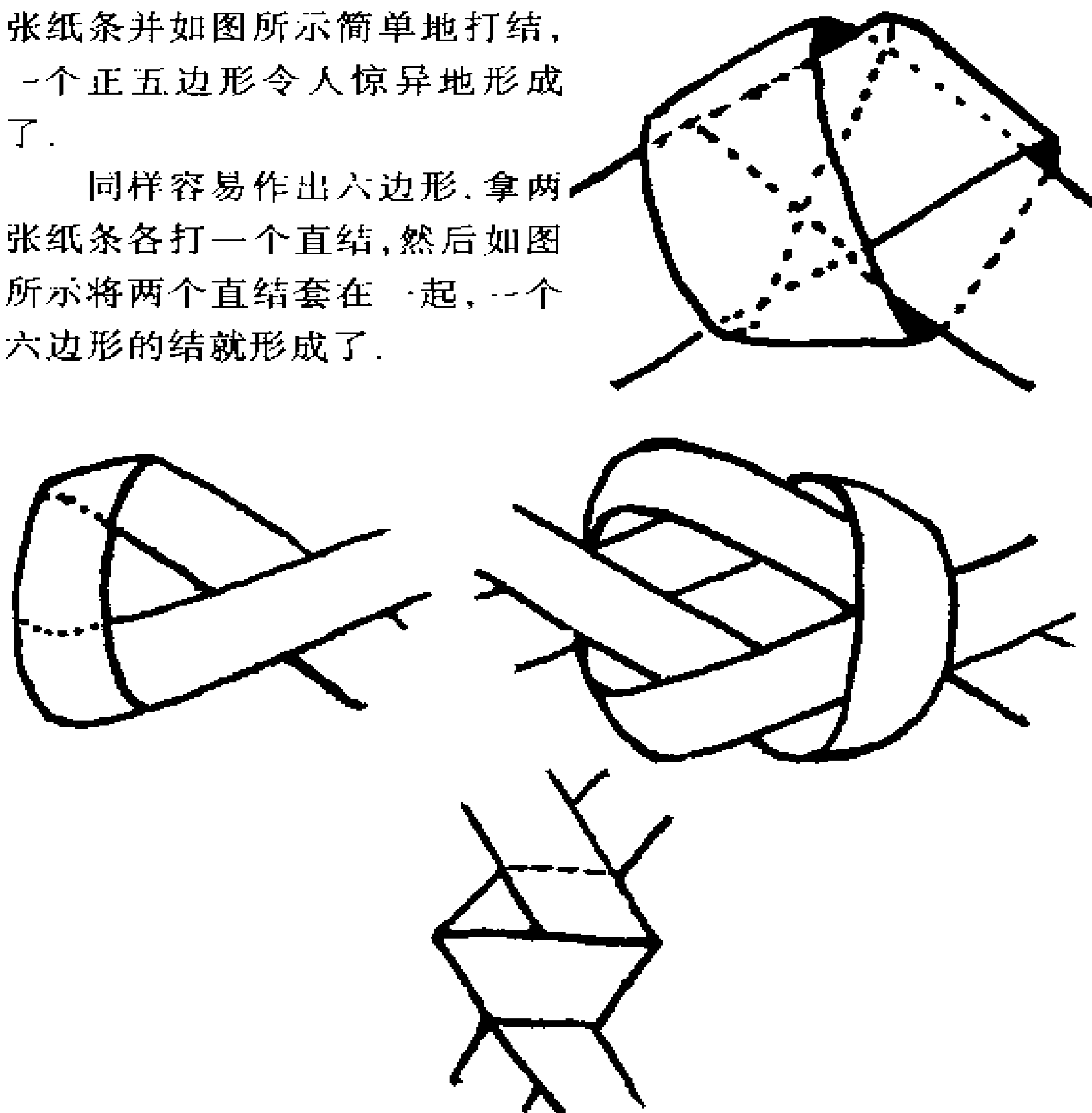


# 打一个多边形的结

以纸条为材料可以产生有趣的数学模型.

让我们看看怎样用一张纸条作一个五边形和六边形. 拿一张纸条并如图所示简单地打结, 一个正五边形令人惊异地形成了.

同样容易作出六边形. 拿两张纸条各打一个直结, 然后如图所示将两个直结套在一起, 一个六边形的结就形成了.

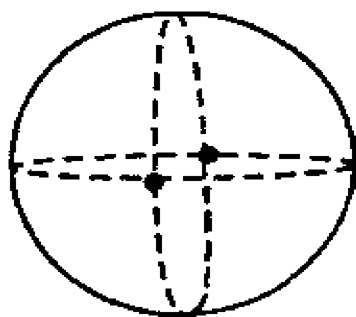


为什么不试试用纸条作其他的多边形呢?

# 黎曼几何的世界

几乎从欧几里得提出第五公设(也称平行公设)以来,数学家们就感到它不像公设,是能够加以证明的.

公元1854年,黎曼发表了一篇关于球面(或椭球)几何的论文.文中对平行公设作了以下否定性陈述:"过不在直线上的任一点,不可能引一条直线与已知直线平行."这相当于对平行公设①的否证.黎曼还决定看看如果改变欧几里得其他公设的陈述会怎么样,诸如"直线可无限延伸并产生无限长度"改为"直线没有边界,但并非无限长".也就是说,它没有端点但却具有有限的长度.在球面几何中这种性质是存在的,因为在那上面所有的"直线"都是大圆②.研究一个球,注意它任意两个大圆永远相交于两点,这意味着没有两条直线(大圆)是平行的.在球面几何里,我们还发现一个三角形的内角和大于180°.而一个三角形的面积随着角的和的增大而增大.



在球面几何中,所有"直线"都是大圆.两"直线"相交于两点,且没有两条直线互相平行.

这样的世界在哪里存在?莫非它就是我们的宇宙?如果我们宇宙的质量足够大,使得引力能让它猝然停止膨胀,并紧接着收缩变小,最终形成一个球的形状.这个球状的宇宙经历几十亿年之后,最后会缩成一个点一般大小,这个点具有无限的热量和密度.如果引力的大小不足以使宇宙紧缩,那么大概它会达到一个平衡点,此时膨胀恰好停止.

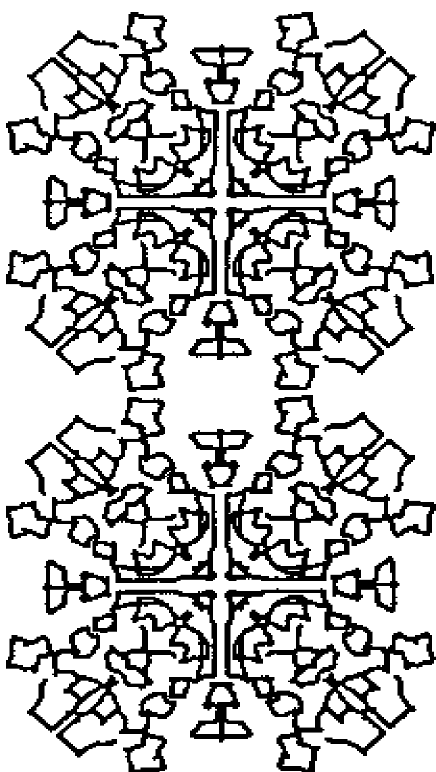
[82]

① 原注:平行公设的一种陈述方法是——过不在直线上的任一点,有且只有一条直线与已知直线平行.

② 原注:一个大圆是在球面上的圆周,它的中心即为球心.

# 孪生的雪花

漫步在雪花纷飞的原野，你会感到置身于一个奇妙的几何形状的世界．雪花可能是自然界中具有六角形对称的最为令人兴奋的例子．



研究一下所看到的雪花晶体，你会发现它们是由圆柱形、面条形、盘状、块状等花样结合而成．没有一朵雪花是一样的，这已成为人们的共识．然而，1986 年 11 月 1 日，美国科罗拉多国家大气探测中心的 N·C·克奈特，在一个玻璃盘上收集到了世界上第一对完全相同的雪花．该雪花被油裹着在 2000 英尺高度的阴影下暴露了 11 秒．盘子被保持冷冻，直至飞机着陆并对晶体照完相．它们是圆柱状的晶体，人们称之为“平顶花格”．

在 1988 年 5 月发表的一封信中（公布在《美国气象学报》）克奈特写道：“人们引证得最多的论断之一，是关于雪花晶体没有两朵是一样的．这已为人类智慧所认可，甚至在该课题的专家中也不持什么异议．”但克奈特发现了“一个引人注意的例子，有两朵雪花如果它们不是完全相等的话，至少也极为相像”．

她继续写道：“多年来对于雪花晶体的收集，作者既没有看到这样晶体的其他例子，也没有在参照标准中找到它．”

试问，能够算出这种现象发生的概率吗？ [83]

# 计算机与艺术

古往今来的历史表明,艺术家和他们的作品无不受当时的知识和数学运用的影响.我们发现,黄金矩形和黄金比在古希腊艺术,特别是著名雕塑家菲狄亚斯的作品中得到了有意识的应用.数学的概念,诸如比和比例、相似、透视、投影几何、视幻觉、对称、几何形体、图案和花样、极限和无限,以及现今的计算机科学等等,对从古到今的艺术和它的各个侧面,都有着深刻的影响.

有些艺术作品如果没有艺术家的知识和数学的运用是不可能创造出来的.例如,由穆斯林艺术家创作的镶嵌以及这种几何形式的扩展,包含 M·C 埃舍尔的生动的作品在内,如果没有艺术家们融入了他们对比例、镶嵌等方面的研究和发现,以及采用了全等、对称、反射、旋转、几何形式的转换等概念,是不可能产生真正的艺术的.埃舍尔曾经用自己周期性的规则来设计充满空间的曲线,但他最初对这种镶嵌艺术的努力失败了,就因为当时他还没有找到所需要的数学.

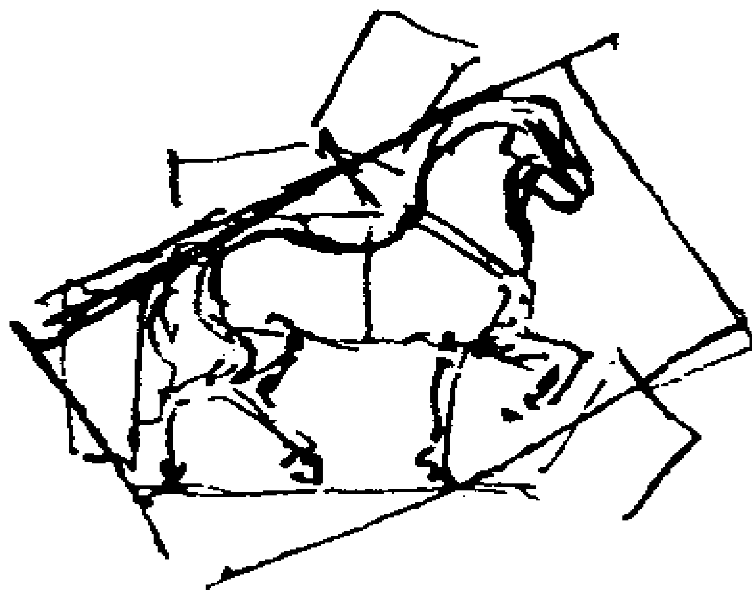
就像艺术家丢勒那样,有时采用投影几何的机械来创造自己的一些作品.今天,艺术家们正在探索一种新的艺术形式和媒介,那就是与数学相关联的计算机.迄至今日,新兴的计算机艺[84]术已由数学家、科学家和工程师联手产生,其每一件作品均不亚于艺术家.起初,大量涌现的是曲线编织、视幻觉、直线作品等艺术内容.



透视绘画器

今天,计算机在商业艺术方面也起着重要的作用.一个熟练的计算机

艺术家用先进的软件能够将生动的艺术加以改变以适于广告.这种改变可以是风格上的多重变化:不同色彩的介入、比例尺的放缩、旋转和跳动、复制物体的不同部分等等,而且在几分钟内便能完成.所有这些放在过去的绘画艺术家手中,如果没有花上几天也要花上几个小时.



用今天先进的计算机和软件,达·芬奇能够在一架计算机上画出这张草图.

工程师、建筑师和其他的设计者在他们的创作中毫不犹豫地接受和运用计算机.只要鼠标轻轻的响动,一座建筑物便能修改,而一架飞机也能转动并显示其所有可能的角度,此外还能增加断面,加进或去掉零件等等.在过去,这样的工作是十分缓慢和辛苦的.

几个世纪来,艺术家们总在寻求不同的媒介以创造他们的作品——水彩画、油画、粉画等等.有些艺术家感到计算机是一种人为的手段,它缺乏自由构思,因而他们宁可直接用手,选择他们自己的方式,而不愿在键盘和屏幕上,或者用钢针和电子写字板由电子的意思工作.另一种观点是,电子计算机的出现宛如

[85] 一种挑战.

由于计算机软件和硬件的改善,颜色能够在屏幕上混合.刚直的线也能用任意形状的曲线使之显得柔和.一幅油画能够有效地变为一幅水彩画,而且所画的形状能够在一念之间加以改变.微型的部分能够很容易地放大并修改.在作品中某些部分能够擦掉、切除或挪到其他地方.艺术家在他们的创造性工作中,给计算机以明确的指令,并将结果以视频的影像或打印的方式记在软片或纸上.软片则可任凭放大.说不定印刷者在设计中窃取了艺术家们创作的作品结构,而我们还误认为这是他自己的新的形式.

谨慎的艺术家们在著名的国际画廊上展示计算机艺术时,仍将它贴上"计算机艺术"的标志.这类作品迄今仅仅标上"艺术"而已.

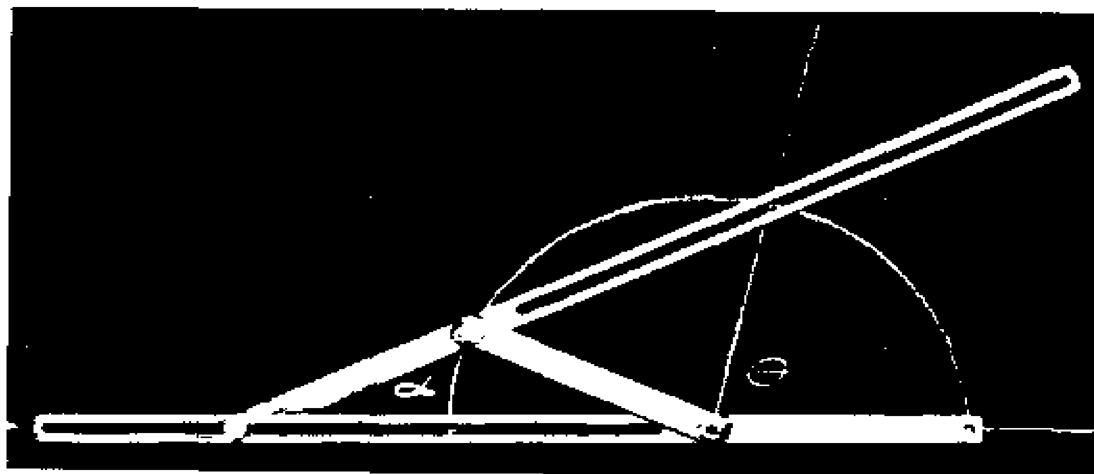
对于在艺术上运用计算机达·芬奇会怎么想呢?从他对革新的爱好①可以设想他不会嫌弃计算机的运用.他曾说过:"……没有人会询问这样做能否称为科学,除非追问它所采用的数学论证和解析."他的作品反映了这样的思想,而且在他的艺术中得到了延伸——例如,在他的许多作品中大多运用了黄金矩形,而在一些传世佳作中则运用了投影几何的概念.《最后的晚餐》这一幅画不同凡响之处正在于此.艺术家将自由地选择他

[86] 们所钟爱的手段和媒介.

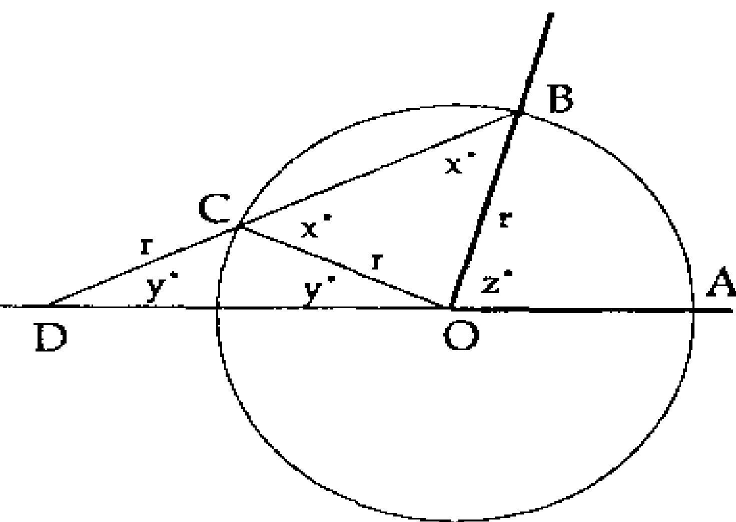
① 原注:他的笔记和种种革新,常被艺术家们用以促进和提高自身作品的水准.达·芬奇对数学的爱好,导致他创造出各种类型的两脚规,这些两脚规能够画抛物线、椭圆和比例图形.他也钟情于透视绘画器的发明,艺术家们(如丢勒)用它画透视物体.

# 阿基米德怎样三等分一个角

古代富有挑战性的一个问题是：只用圆规和直尺，三等分一个任意的角. 它导致了某些迷人的数学思想和结构的发展. 阿基米德的滑动传杆装置便是这样的一种成果.



阿基米德怎样用它三等分一个角——




假设我们要三等分的角为 $\angle AOB$.

如图，延长 $\angle AOB$ 的边. 令 $r$ 表示以 $\angle AOB$ 的顶点 $O$ 为圆心的圆的半径.

由于 $\angle AOB$ 是 $\triangle OBD$ 的外角，所以 $z° = y° + x°$.

$$(m\angle AOB = m\angle DBO + m\angle ODB.)$$

类似地，$\angle BCO$ 是 $\triangle CDO$ 的外角，这就有

$$x° = y° + y° = 2y°.$$

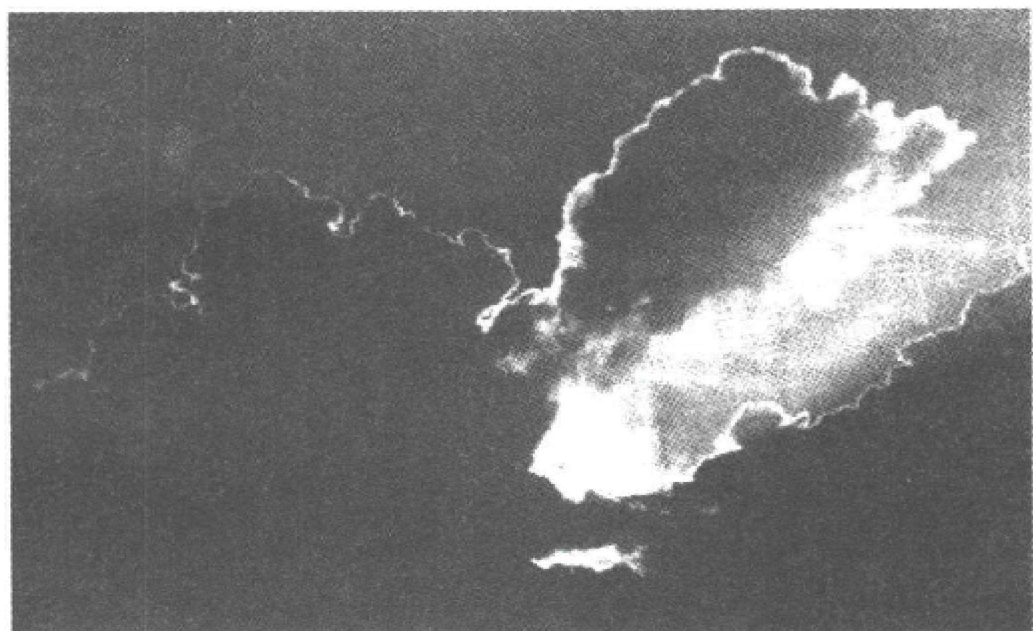
$(m\angle BCO = m\angle CDO + m\angle COD.)$

替换得， $z^\circ = y^\circ + 2y^\circ$，即 $z^\circ = 3y^\circ$.

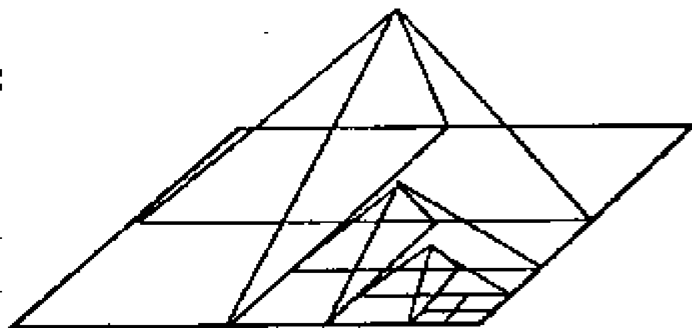
[87] 因此，$y^\circ$是$\angle AOB$ 大小的$\frac{1}{3}$，从而$\angle AOB$ 已被三等分.

# 分 形 与 云

自然绝不会停止那令人惊异的自我的分形复制.下图是一幅太阳在云的边缘发光的照片，它看起来像是一张计算机的分形复制图.



分形所考虑的是分数维数.在欧氏几何中，一个点是零维的，而一条线是一维的，一个面是二维的.那么一根锯齿形的直线又如何呢？在分形领域，一根锯齿形的直线维数位于1和2之间.从一条直线段开始，将其细分为三部分，然后像作雪花曲线那样进行下去，那么它的维数也将在1和2之间.如果我们从一个矩形(二维物体)开始，然后将其细分为四个部分，再在它中间部分



的上方构造一个金字塔,并如上图那样形成分形,那么这个分形的维数便在2和3之间.
[88]

# 分形与厥类植物

分形几何以自然的几何而著称. 它提供了一种描述自然界物体的数学手段. 这些物体是与欧几里得物体不相一致的.

把几何的分形想象成一种无尽的几何图案, 这种图案不断地以更小的式样而自我复制. 这样, 当一个几何分形的部分放大的时候, 它看起来精确地像原先的样式. 作为对比, 当圆的一部



分放大的时候,它开始显现较少的曲线.

蕨类植物是分形复制的一种理想例子.如果你对准分形羊齿叶的任何一个部分,它会显现与原来羊齿叶一样的形状.分形羊齿叶的图案能够在计算机上制作出来.[89]

# 数 的 发 展

对于数发展史的缩写几乎是亵渎神圣的！自然数、整数、有理数、无理数、虚数、实数、复数，等等，是在何时、何地又是怎样演化的？

像大多的数学概念那样，它们的演进或由于偶然，或由于需要，或由于稀奇，或由于探索的需求，而游刃于某个思维领域.

很难想象，当试图解各种问题时该不该把它们限制在一个数的特殊集合里.我们承认许多问题是局限在某个特定的范围或区域，这就使得它伴随着特定的集合.但至少我们还应该知道解答中其他类型数的存在，而这样的问题正好成为一种练习.

虽然现在我们手上已经有了全部的复数，但我们不妨想象处理这样一个问题，即求方程 $x+7=5$ 中的 $x$ 值，但不知道负数.这时会有什么反应呢？

——这个问题有缺陷！

——没有解答！

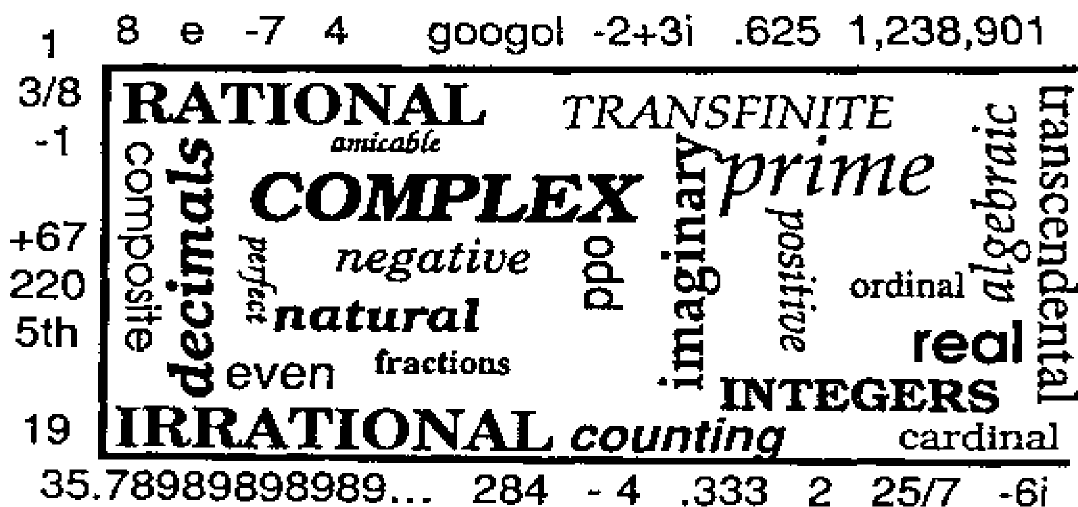
——该方程是不正确的[①]！

等等.但幸运的是，终有一些勇敢而自信的数学家，他们愿意冒险，并坚信解存在于一个未被发现的数的领域，而最终他们迈出了一步，在原来之外规定了一个新的数的集合.可想而知，对于解上述问题，创造出一个负数是何等地令人兴奋和不平常.同样令人感兴趣的是对新数的验证，看它是否也遵循已存在的数的集合的公理.

---

① 原注:阿拉伯的教科书把负数介绍到欧洲.但 16 和 17 两个世纪里，欧洲的数学家不愿意接受这些数.N·楚亏特(15 世纪)和 M·斯提德尔(16 世纪)将负数归为荒唐的数.虽然 J·卡当把负数作为一种方程的解，但他认为它们是作为一种不可能的回答.甚至 B·帕斯卡也说:“我知道人们无法理解，如果我们从零里拿去四，那么零还会留下什么？”

[90]　我们几乎不可能把时间都放在不同数的起源上，但我们能够设想类似的问题及新数发现的梗概.




（图中所写的英语是各种各样的数，如复数、实数、自然数、有理数、无理数、小数、素数、超越数等等，具体请对照书后“索引”——译者）

在许多世纪中，世界上不同地区的人都只用到自然数. 大概那时他们没有其他的需要. 当然，他们各自对自然数书写的符号和体系，随着文化的不同而不同①.

第一个零出现的时间可以追溯到第二个一千年，那时零出现在巴比伦的粘土板上. 它最初是空位，后来用两个符号或表示零. 但这里零更多地是作为一个位置的持有者，而不是作为一个数.

玛雅人和印度人的数的系统最早将零既作为数零，又作为位置的持有者.

有理数则是进化的第二阶段. 人们需要分配一个整体的量，

① 原注：古巴比伦人有一种位置数制系统. 为了写自然数，他们用符号代表 1，而用代表 10. 但那个时期的埃及人没有一种位置系统，而是用符号代表 1，用代表 10，用代表 100，用代表 1000 等等.

就像分一块面包那样.虽然没有设计表示这些数的符号,但古代 [91] 人知道分数量的存在.例如,埃及人用"嘴巴"𓂋来写他们的分数,如:𓂋 是$\frac{1}{3}$, 𓂋 是$\frac{1}{10}$, 𓂋 是$\frac{1}{223}$.

希腊人则用线段的长度表示不同的数量.他们知道在数轴上的点并不只是由自然数和有理数占据.这时我们发现了无理数的介入.而留下来的问题是:

—— $\sqrt{2}$是第一个无理数吗①?它是把毕达哥拉斯定理用于直角边长为1的直角三角形时得到的结果.

—— $\pi$ 是无理数吗?

—— 黄金比值$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$是无理数吗?这个比是他们利用黄金矩形时得到的.

无须多说,我们知道那时人们已经用到了无理数.

历史揭示,在新数发现的过程中解决旧问题和创造新问题是同时发生的.一个新数集合的发现是一码事,但它所采用的定义和逻辑系统则必须是可接受的,而且应与多年演化中所采用的一些规则相共容②.负数曾难于为欧洲的数学家所接受,这种状态甚至延续到17世纪.平方根的运用若不限于非负数的集合,那么虚数便能通过$\sqrt{-1}=i$ 而创造出来.在全世界的各种

① 原注:他们把无理数作为不可通约的比.有一个与其起源相关的故事,它与无理数的创始人希帕斯密切相关(公元前5世纪).希帕斯最后被毕达哥拉斯的信徒们扔进了大海.毕达哥拉斯信徒们的论点是:所有的东西都可以使其成为整数或它们的比.希帕斯的发现反驳了上述论点而使毕达哥拉斯的信徒惊恐万状.不过,毕达哥拉斯信徒们的所作所为也间接地证明了$\sqrt{2}$是无理数.

② 原注:那时,对于整数、有理数、无理数和负数的逻辑基础还没有建立.印度和阿拉伯人在他们计算中自由地运用这些数.他们用正数和负数作为资产和债务的值.他们的工作主要埋头于计算,而不太关心它们几何上的有效性.这是由于他们的算术不依赖于几何的缘故.

文化中,都有多项式方程,它要求在其解中运用虚数.一个这样的方程就是 $x^2=-1$.设计一个普遍性的集合,把所有的数都联系在一起,这样就引进了复数,它出现在像一元二次方程 $x^2+2x+2=0$ 这类方程的解中.复数(形如 $a+bi$ 的数,这里 $a,b$ 是实数,而 $i=\sqrt{-1}$)是16世纪间引入的.所有上面提到的数,都可以看成复数的一种类别.例如,实数是虚部为0的复数,而

[92] 纯虚数则是实部为0但虚部不为0的复数.

当用几何进行描述时,虚数和复数变得更为具体.像古希腊人在数轴上描述实数一样,复数可以用复平面来描述.每个复平面上的点都对应着一个且只有一个复数,反之亦然.这样,方程 $x^5=1$ 的五个解就能用图解表示出来.

由于复数可由二维的点描述,这似乎就有一个逻辑上的过渡问题,即问一问什么样的数可以描述高维空间上的点.我们发现了一种叫四元数的数,可以用来描述四维空间.现在留下的问题是——数到此为止了吗?我们说,随着新的数学思想的发展和应用,还会经常产生新数的!

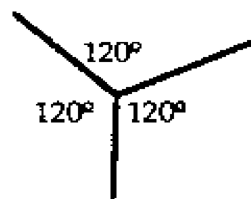
[93] 看一看上文中所列的数,作为复数它们该怎样进行分类呢?

## 三部接合——发生在自然界的一种数学事件

为了有效地解释发生在自然界的事件，科学家和数学家们试图发现公式、图样、数字等等，以帮助他们预示自然的结果．正如大家知道的那样，自然未必永远符合这种预示，但数学的结论无疑使事件的发生有着较高的频率．

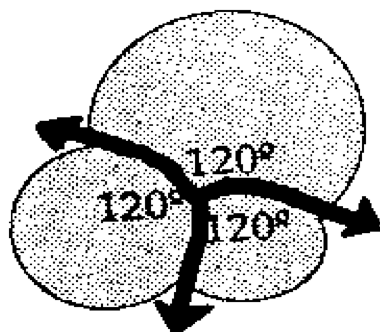
观察三部接合处——某自然事件所趋向的平衡点．

三部接合处的基本要点是：此处三条线段相遇，彼此间交角为 120°．

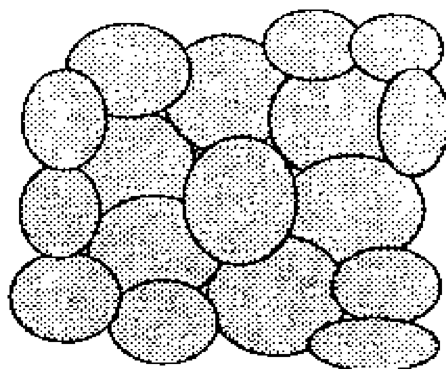



许多自然现象由于空间的疆界和可用性等原因，结果形成了三部接合．

首先考虑表面张力，这种张力会使表面尽可能地减少．拿肥皂泡来说，由于每个肥皂泡中都包含了一定量的空气，表面积必须在这样的条件下达到最小．这就解释了为什么单个肥皂泡总会变成球形，而对于一丛肥




这里三个肥皂泡组成一丛，相交于一个三部接合点．

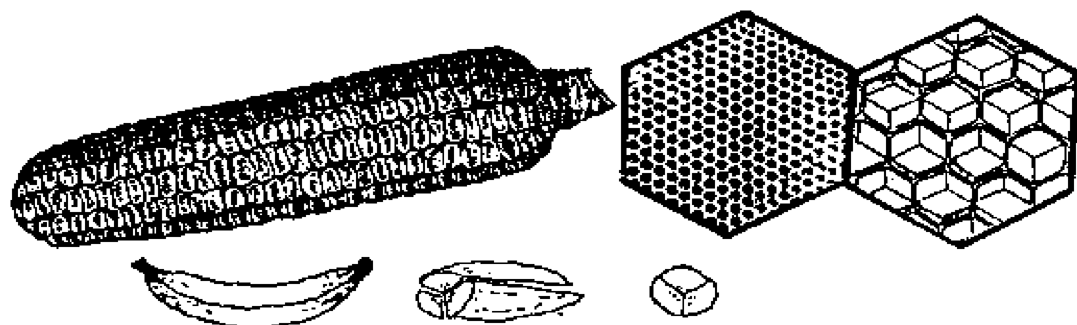


面包在烤盘上的一种同化．

皂泡（就像肥皂水或肥皂泡沫一样）的边缘，则会相交于一个三部接合点．

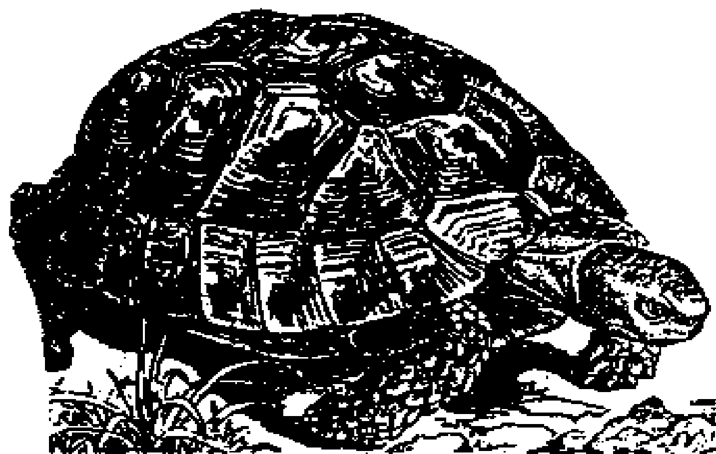
其次,看一看龟壳盘的形成或面包在烤盘上扩展的方式.每种情况都是由于边界的限制而造成的.对于每一种紧密堆在一起的物品必然会发生这样的现象.龟壳盘生长时周边向着其他部分推进,而烤盘上的面包当它发酵膨胀时也是一样.结果任何空隙都填满了,表面积也因而达到最小.

斑马、长颈鹿身上的斑痕图案、蛇的鳞甲、麻雀的羽毛、鱼的鳞片等等上面,我们都能找到三部接合处.三部接合的另一些例子是:香蕉、玉米、蜂巢、泡沫等等.可以说在自然界三部接合的发生是很频繁的.



玉米粒的构造、六角形蜂巢、香蕉内心的构造,等等,都是三部接合的例子

另一些自然事件的结果也是三部接合,如弹性物质石头、泥



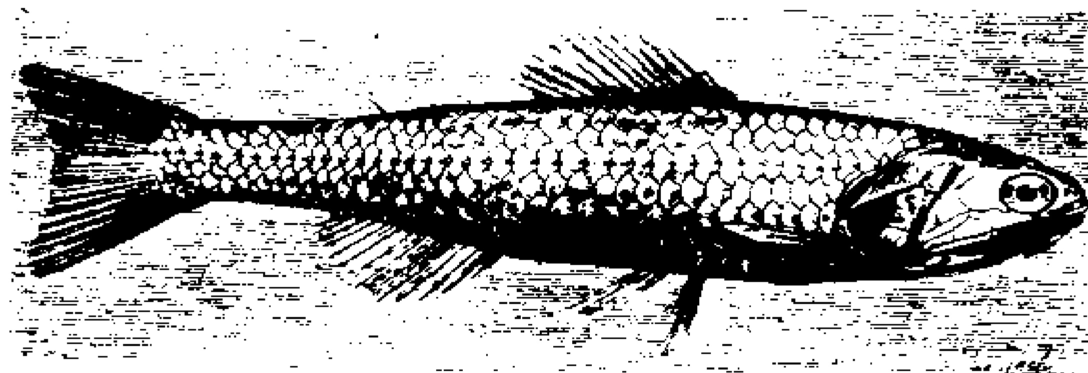
龟壳盘上形成的三部接合.

地等物体的龟裂(非弹性物质如玻璃等则相反).在干的泥地分子中有一种牵引力.当这种力太大时,力就会使地表破裂为三部接合的形式.这里自然的限制会使开裂的尺寸最小,裂缝则出现在物质数量最少的地方.对于皱纹,自然的限制会使皱缩(像葡萄干的皮)或膨胀(像人类的大脑生长)产生最小的剩余 [95] 量,而三部接合则出现在沟壑或脊背的地方.



三部接合出现在人类大脑的沟部和脊部.

许多自然现象能够用力和环境的结合来解释,其结果产生一些不同于三部接合的形式.在这类例子中,自然必须限制在某种条件下变化,如在某部分空间或表面才有效,等等.有种种的数学运算可以求函数的极大值和极小值,例如用求函数一阶和二阶导数的方法;用线性规划解决生产问题上的极大极小等等.自然现象总是在它所创造的演化中遵循着一条使所用的功或所耗费的能量达到极小的路线.回顾上面描述的三部接合的发生,便是自然的作品.

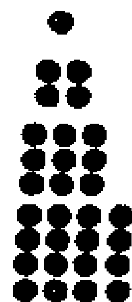


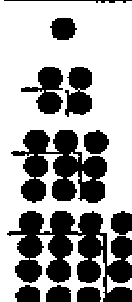
发生在鱼鳞构造上的三部接合. [96]

## 多边形数

多边形数是这样的数，它的形状与正多边形的形状有着密切的关系. 如下图所示：

| 三角形的数 | ○ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 平方数 | ○ | | | | |
| 五边形的数 | ○ | | | | |
| 六边形的数 | ○ | | | | |
| 七边形的数 | ○ | | | | |
| 八边形的数 | ○ | | | | |





$= 1$

$= 1 + 3 = 4 = 2^2$

$= 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$= 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

研究由这些数形成的图形，能够发现它所具有的数学性质．例如，研究平方数的形状，可用以确定奇数列的和，即：

$$1+3+5+7+9+11+13+\cdots=?$$ [97]

## 调和三角形

与阿基米德(帕斯卡)三角形[①](它的每一项都等于上面一行两侧项的和)不同,调和三角形的每一项都等于它下面一行正下方项起右边的所有数的和.这个事实揭示了一些有趣的信息,而这些信息是有关某特定无穷数列的.

```
1/1  1/2  1/3  1/4  1/5  1/6...
1/2  1/6  1/12 1/20 1/30...
1/3  1/12 1/30 1/60...
1/4  1/20 1/60...
1/5  1/30...
1/6...
 ⋮
```

(1) 第一行的项形成调和数列,该数列发散;而其他行的数列则收敛.

(2) 第二行的项是三角形数倒数的一半,其总和为1.

(3) 第三行的项是金字塔数(以三角形数为底的锥形)倒数的三分之一.由于它所涉及的是调和三角形中$\frac{1}{2}$这一项下一行正下方项起右边所有的数,所以该行数的和必为$\frac{1}{2}$.

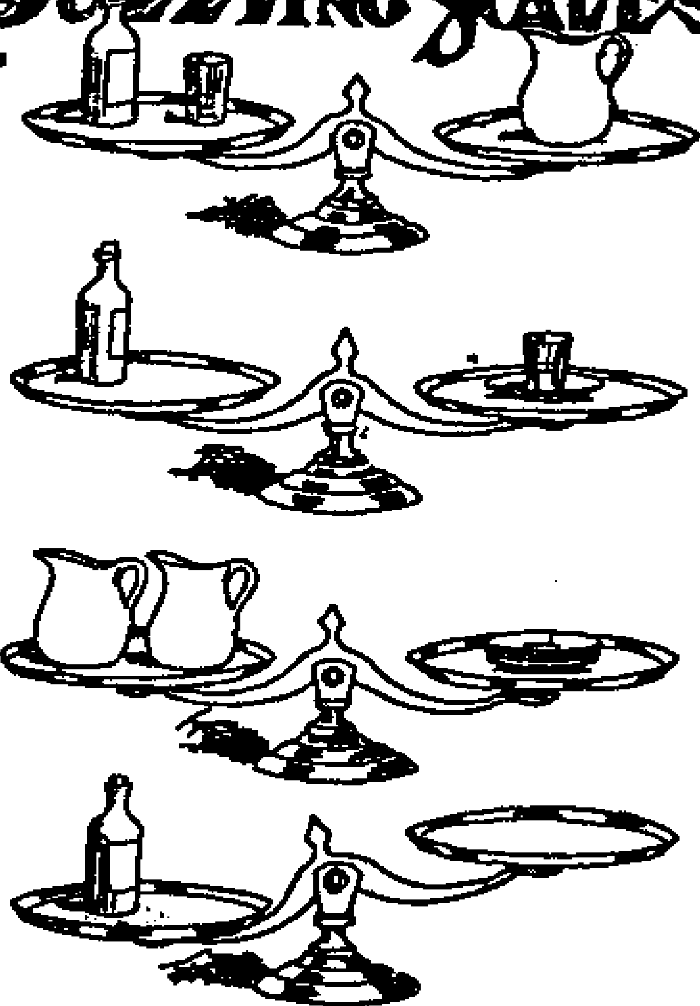
(4) 调和三角形的项还具有以下的性质:即每一项都等于

① 原注:更多的关于阿基米德(帕斯卡)三角形的内容可见第289—290页.

它正上方与右上方两项的差$\left(例如\frac{1}{2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)$.另外,每一项也是它下一行正下方项起右边所有数的和. [98]

## 洛依德天平之谜

这一谜题引自《谜题百科全书》(1914)，由著名美国谜题专家山姆·洛依德(Sam Loyd，1841—1911)所作.




多少玻璃杯才能跟瓶子平衡?

(图上方的英语意为"使人迷惑的天平"——译者)

[99] (解答见附录)

# 统计学——数学的巧妙操作

均值、平均数、中位数、百分率、众数、百分点、图表、……所有这些都是巧妙处理数据的办法.取两个数 6 和 8,我们可以作出各种比较:如比 6:8;分数$\frac{3}{4}$;百分率 75%;等等.一旦人们收集数据并力图描述一种状态时,他就开始步入统计学的领地了.无论是有用的或是容易使人误解的资料,统计学几乎总是具有影响力的.

它可用于预示各种现象,诸如:

——一位总统候选人在盖洛普民意测验中的得票率;

——统计在美国大学入学考试中,学力及智力性向测验(SAT)中的得分点;

——经济状态(通胀率,国民经济总量的增长数,失业率,收入的增加或减少);

——道·琼斯指数(证券市场的平均数);

——保险价格;

——人口统计资料;

——天气预报;

——药品效力和有效性分析;

——赌博的输赢机会;

——海浪和潮汐的影响范围;

——等等.

统计的领域在不断扩大.当我们看到任何统计分析的最终结果时,我们务必要十分谨慎,不要忽略了对资料的说明.要弄清楚样本的大小和取样的方法,看看是否与其他的样本取样相一致.此外样本还必须有尽可能大的随机性.例如,对于投票结果的预测,选样最好在一个特定的投票点的出口处进行.设想投票的调查只在具有很大倾向性的邻里间进行,把这样小范围内

的结果作为预测的依据,岂不滑稽可笑?

假定有一份报纸刊登了以下的消息:"在《每日调查》栏主持的一次投票中,有75%的投票者今年感染了流行性感冒."这个报告中近75%人感染流感的结论会使人吓一跳.《每日调查》并没有指出它的投票范围.说不定他们只问到他们办公室里的4个人,而其中有3人受到了流感的困扰.没有人会基于一种不知





样本大小和样本随机程度的结论.然而,也经常有人在给出统计数据时,不注意交待资料的情况——大概是漏了或故意省略.

变更统计的另一种办法是改变样本的组成.例如,原来测定失业率的办法是基于在市民和私营企业工作的人中的失业人数.1980年后这种统计也包含在军队服役的人员.因为每个在军队服役的人员都是就业的,这就自然地扩大了就业人数.这样,1980年前的失业率统计与1980年后统计的比较便是无效的. [101]

由于电子计算机的介入,使得能够很快地收集、分类和分析大量的资料.只要分析处理公平,而不是人为地操纵,那么统计结果和信息将是十分可靠的.

统计学的影响和力量是巨大的,它能够用以说服和劝阻个别人.例如,若某些人感到自己的投票将不会改变最终的结果,那么他们就可能不会特别积极去投票,尤其在投票结束前几小时,统计显示投票结果偏于一边的时候.

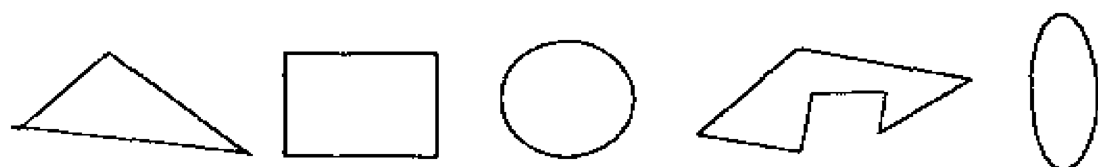
统计学是一门非常有力和非常有说服力的数学工具.人们对于印刷的数字予以充分的信赖.当某种情况用一个特定的数值来描述时,那么这个描述的有效性在观察者的心目中便增加了.统计学家的责任就是要让大家知道,在无知者眼中的资料或天真观察者眼中贫乏的资料,都可能像虚假的东西那样欺骗人. [102]

## 咖啡杯与油煎圈饼的数学

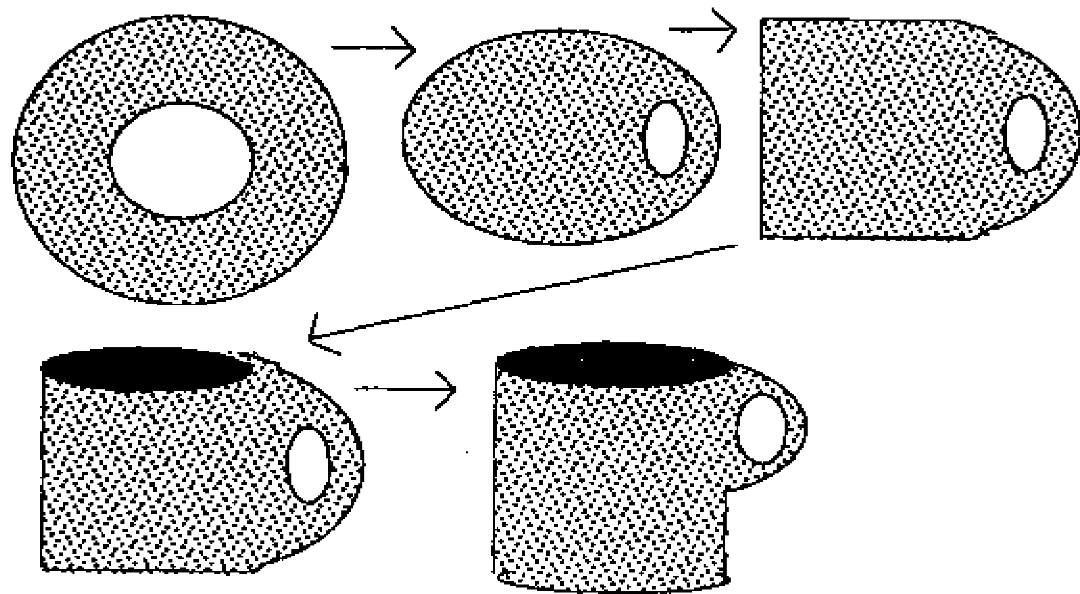
一个油煎圈饼和一只咖啡杯在拓扑上是等价的物体.

两者在形式上都准确地有一个洞,而咖啡杯能够通过拉伸、扭曲和造型变为一个油煎圈饼,反之亦然.

拓扑学研究的是物体在弹性变形下保持不变的特征.例如,以下物体都是等价的:



在拓扑学中,你所考虑的物体就像在一张橡皮膜或一个能够拉伸或拖曳的平面一样.所有上述图形都能通过弹性变形变为同样的形状,因而它们是等价的.拓扑学不考虑图形的大小、形状和刚直性.在拓扑学中"多长"、"多大"这类特征是没有意义的.它注意的是"哪里"、"什么中间"、"内部"或"外部"等性质.下面让我们看一看,一个油煎圈饼是怎样变形为一个咖啡杯的.

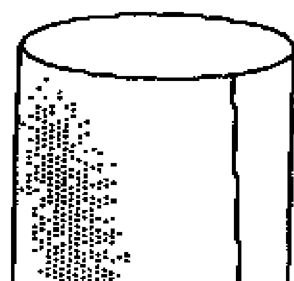


# 数学式的家具

当人们发现每天都在运用数学的抽象思维时，便会深刻地感受到作品中的创造精神. 例如，莫比乌斯带是作为一种单面扁形带子的模型，这种带处处是均匀的.



四面体可以用来设计一种装液体饮料的容器；分形可由计算机产生并创造出逼真的风物景观.



从一个圆柱形的纸筒构成一个四面体容器.



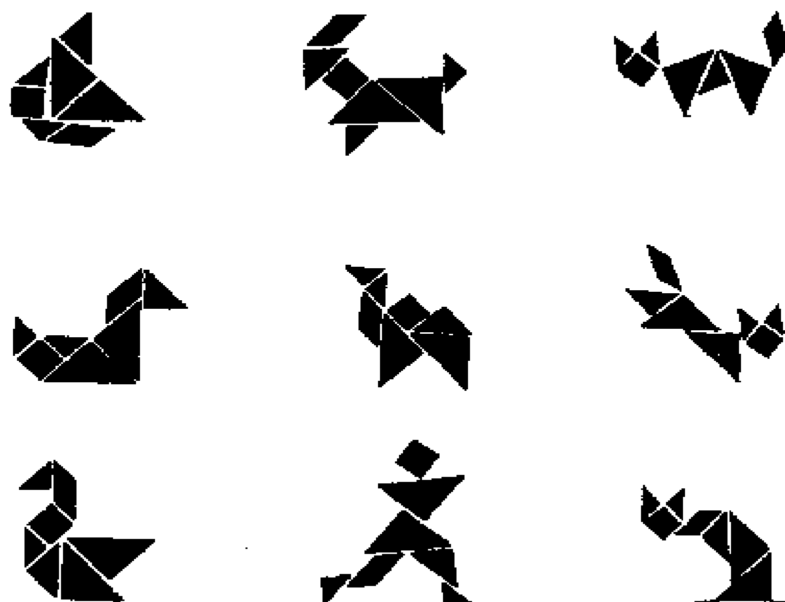
已成为19世纪最为流行的谜题之一.它是由七块板构成,其中五块是等腰直角三角形,一块是正方形,另一块是平行四边形.



七巧板的七块板及七巧板方块的构造.

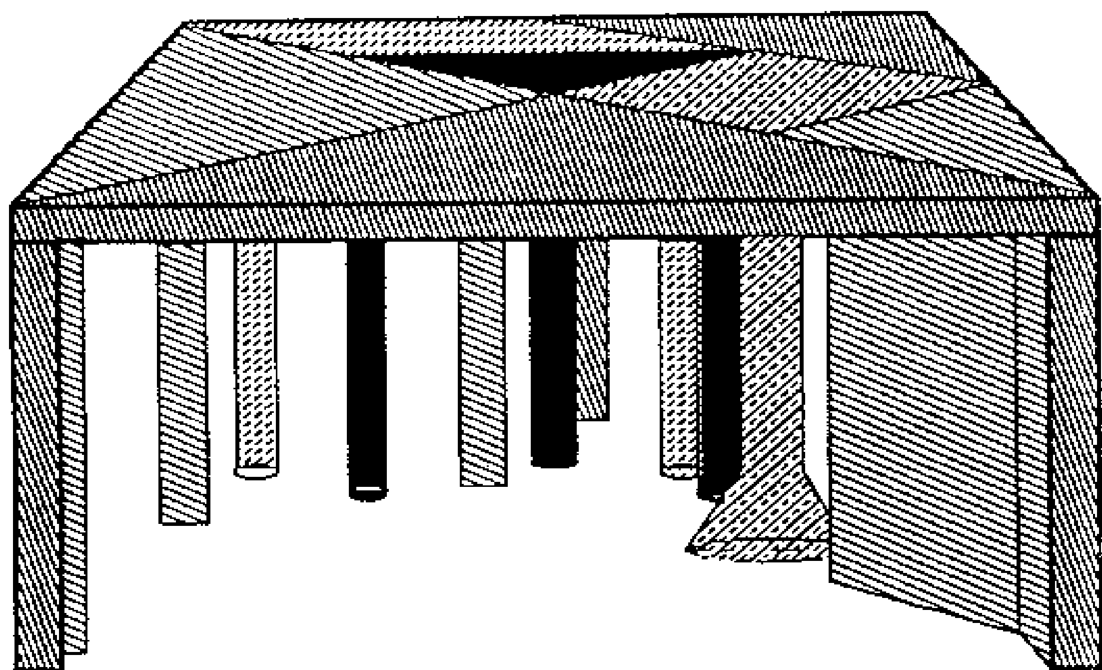
多年来,人们用七巧板的七块板,创作出了超过1600种的图案.人们用传统的七巧板方块,拼出一只骆驼、一只猫、一只鸟、一叶小舟、一个人及许许多多其他的物体.

如今,意大利的设计师M·摩洛兹创造了令人困惑和多种用途的"七巧板台桌".这种台桌在一年一度的米兰设计展览会上展出.它是在七巧板的七

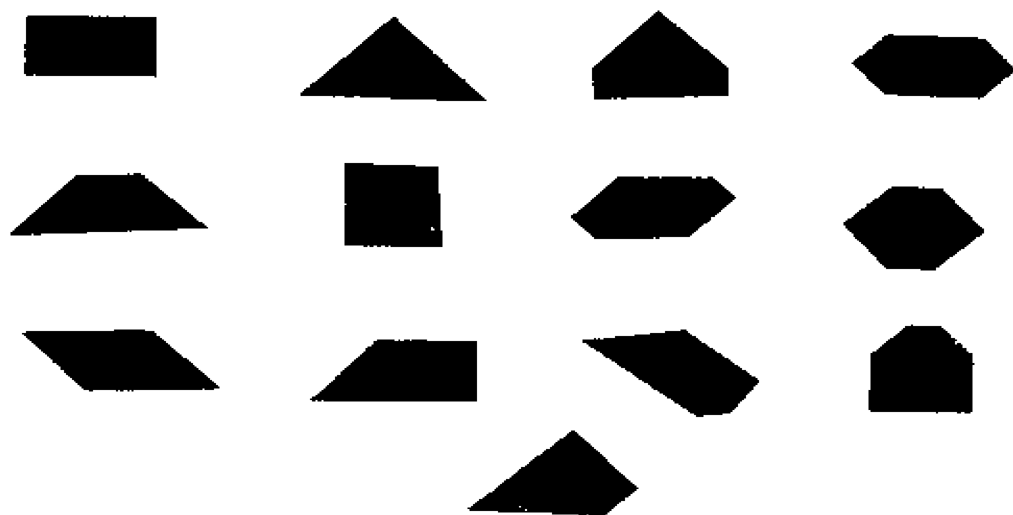


[105] 块板的基础上,用有趣而能变化形状的脚,使得七块板中的每一块都能独立地站立.对于七巧板所能变形的所有形状,台桌都能采用.它能够适应于各种布置的变化,从一个矩形外形的桌子,

装配成七古八怪无论怎样总能站立的形状.



七巧板台桌

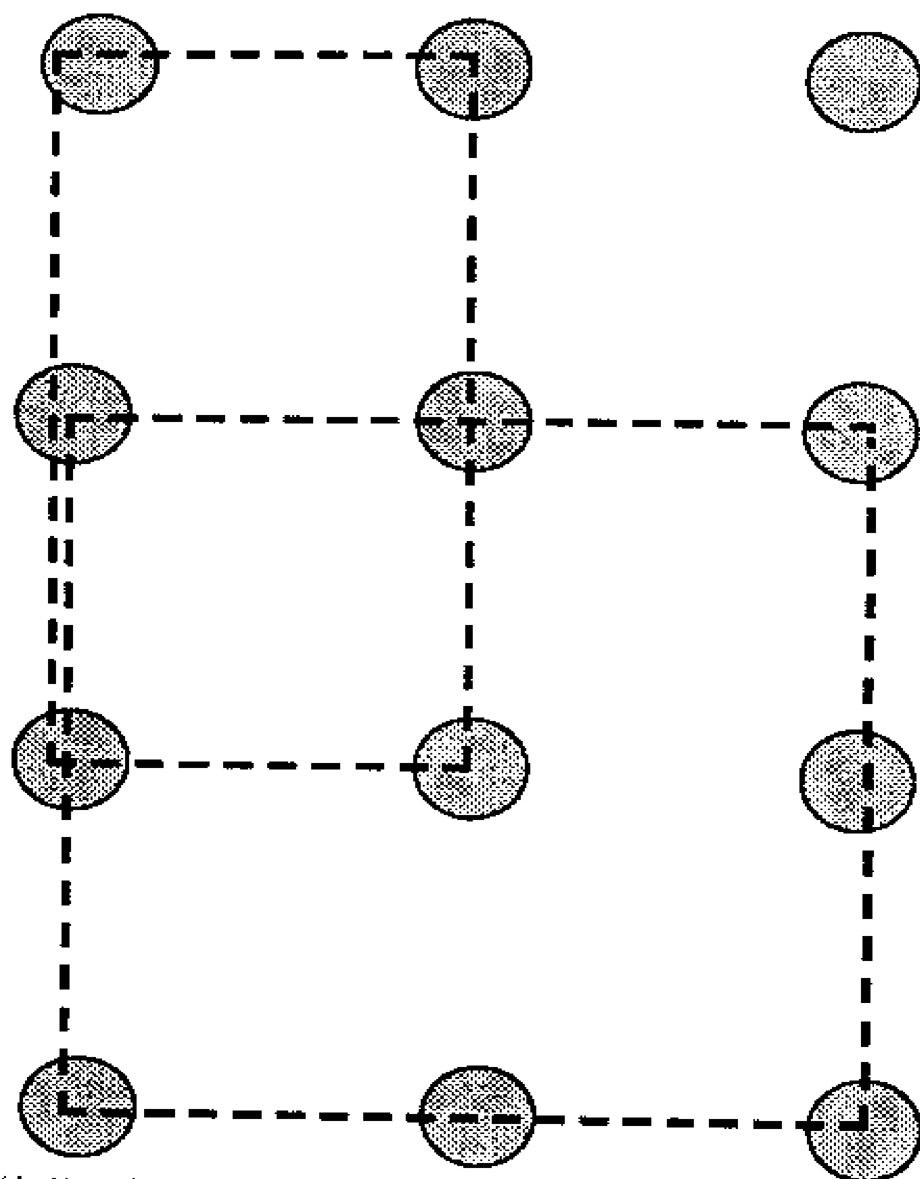


由七巧板的七块板能构成13种其他多边形的形状.这样,一个方形桌便能变形为上述形状中的任何一个.你能确定它们的结构吗?

[106]

## 作矩形的谜题

由图中的 12 个圆点能组成多少个矩形？矩形的四个顶点都必须在圆点上.

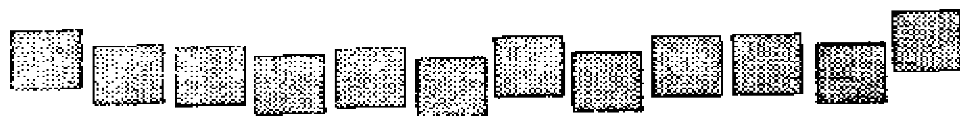


[107] （解答见附录）

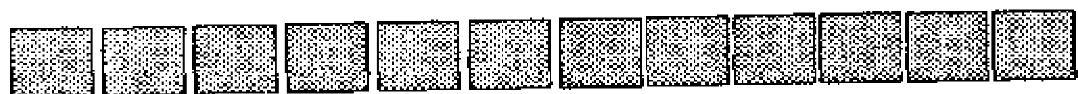
# 素数的几何解释

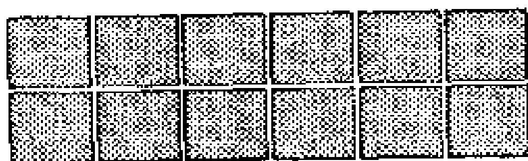
数学概念的几何解释，常常赋予概念另一种透视和视觉上的意义．根据定义，素数是大于1的数，它只有1和自身作为因子．让我们看看，怎样从几何上去满足这个定义．

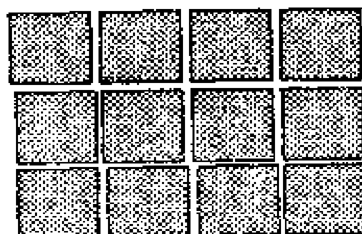
观察12个方块：



现在重新排列它们，使之形成不同形状的矩形．

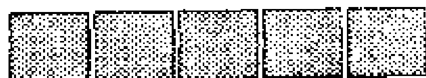






正像我们看到的，每个矩形都图示了12的因子——$1\times 12$；$2\times 6$；$3\times 4$——其因子为：1，12，2，6，3，4．

现在我们看看，如果一个数是素数，例如5，会出现什么情况？——它只可能有一个矩形！即如下图所示．这表明5只有因子1和5．



[108]

# 作一个 8 × 8 幻方

你能想出一种作 8 × 8 幻方[1]的策略吗？或许有点可能．但要知道所组成的八阶幻方共有多少种就比较困难了[2]．

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

把从 1 到 64 的数如左图那样依次放在 8 × 8 方块的小格里．如示作对角虚线图．重新放置位于对角虚线上的每一个数，将它换成与之互补的数(在幻方中，如果两数的和等于幻方的最大数与最小数的和，则称该两数为互补)，这样就能得到下面的幻方．

| 64 | 2 | 3 | 61 | 60 | 6 | 7 | 57 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 55 | 54 | 12 | 13 | 51 | 50 | 16 |
| 17 | 47 | 46 | 20 | 21 | 43 | 42 | 24 |
| 40 | 26 | 27 | 37 | 36 | 30 | 31 | 33 |
| 32 | 34 | 35 | 29 | 28 | 38 | 39 | 25 |
| 41 | 23 | 22 | 44 | 45 | 19 | 18 | 48 |
| 49 | 15 | 14 | 52 | 53 | 11 | 10 | 56 |
| 8 | 58 | 59 | 5 | 4 | 62 | 63 | 1 |

[109]

① 原注：幻方是一种由数组成的方形阵列，它任一行、列或对角线上数的和都相等．详见本书上册第 83 ~ 87 页．

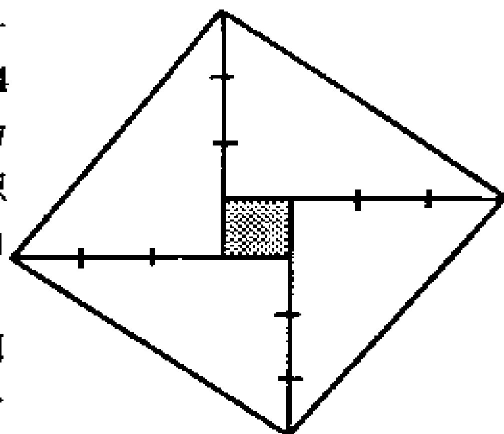
② 译者注：对于 $n$ 阶幻方的种数问题是一项艰难的工作，今天人们已经知道不同的四阶幻方有 880 种，不同的五阶幻方有 275305224 种，至于八阶幻方的种数该是多大的数目也就可想而知了！

# 对毕达哥拉斯定理的谈论

**证明：**

对于一个边长为 3 和 4 的直角三角形，其斜边为 5.

取 4 个直角边长为 3 和 4 的直角三角形，如右图所示组成一个正方形. 四个三角形的面积为 24 个平方单位，内部的正方形面积为 1 个平方单位. 从而大正方形面积为 25 平方单位，它表明直角三角形斜边为 5，且 $3^2+4^2=5^2$.



上述优雅的证明，出现在中国的一本叫《周髀算经》的书中（约公元前 300 年）. 特别有趣的是，这是没有用到毕达哥拉斯定理情况下，论及毕达哥拉斯定理的一个例子. 从直角三角形有直角边 3，4 开始，用四个全等的三角形组成一个正方形. 虽然证明是专就 3－4－5 直角三角形图解的，但它的方法对于具有直角边 $a$ 和 $b$ 的任意直角三角形都能普遍适用. 从而这种对毕达哥拉斯定理的谈论，显示了一种重要的方法.

**一般性证明：**

如图标上直角边 $a,b$ 和斜边 $c$，用两种方法计算正方形的面积：

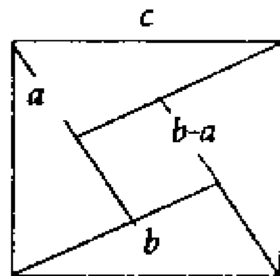
(1) 4 个三角形面积＋内部正方形面积；

(2) 大正方形面积.

$$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+(b-a)^2=c^2,$$

$$2ab+(b-a)^2=c^2,$$

$$a^2+b^2=c^2.$$




[110]

## 每一个三角形都等腰吗？——你能找出毛病吗？

(第1～3步参见图1)

(1) 取任意三角形$\triangle ABC$.

(2) 令射线$BD$平分$\angle B$.

(3) 作线段$AC$的垂直平分线.记射线$BD$与$AC$的垂直平分线交于$E$点.记$F$为垂直平分线与线段$AC$的交点.

(第4～12步参见图2)

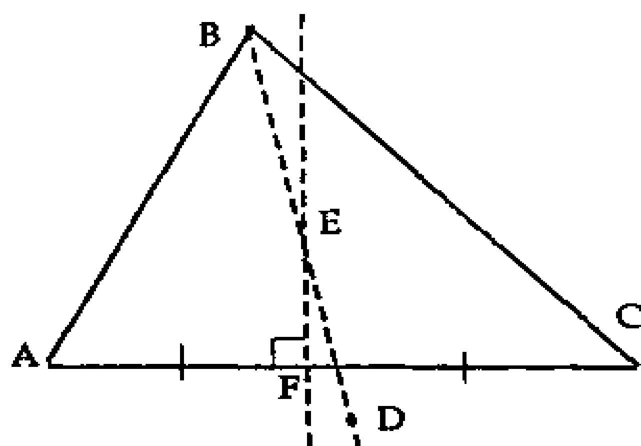



图 1

(4) 从$E$点作线段$AB$和线段$BC$的垂线,记$EG$和$EH$为各自的垂线段.

(5) 如图连接线段$AE$和$EC$.

(6) $\triangle BGE \cong \triangle BHE$($SAA$)——$\angle 1 = \angle 2$,因为$\angle B$被平分(第2步);$\angle BGE = \angle BHE$,因两者均直角(第4步);

$|BE| = |BE|$,恒等.

(7) $|GE| = |HE|$,因为$\triangle BGE \cong \triangle BHE$(第6步).

(8) $|AE| = |EC|$,因为线段$EF$是线段$AC$的垂直平分线,在它上面的任意点到$A$,$C$等距离.

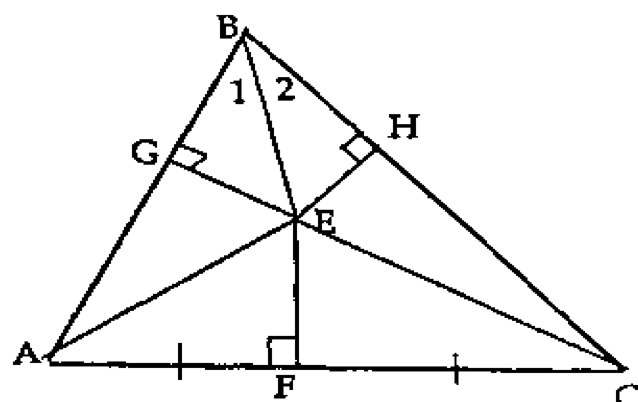



图 2

(9) $\triangle AGE \cong \triangle CHE$，因为它是直角三角形，而且斜边和一组对应的直角边全等(第 7,8 步).

(10) a) $|AG| = |CH|$，因为它们是全等三角形的对应部分(第 9 步).

b) $|BG| = |BH|$，因为它们是全等三角形的对应部分.(第 6 步)

(11) $|AB| = |BC|$，第 10 步等量相加.

∴(12) $\triangle ABC$ 是等腰三角形(第 11 步).

(见附录的说明) [111]

## 在完全数的探索中

毕达哥拉斯的信徒们相信，整数是万物之本.他们甚至主张将一些特定的数拟人化.例如，将偶数看成是阴性的，等等.毕达哥拉斯的信徒们研究了数的类型和性质，完全数则是他们比较集中研究的一种.

### 6，28，496，？

完全数是这样的一种数，它等于除自身外的所有因子和.6是一个完全数，因为它除自身外的因子：1，2，3的总和为6.28和496也是完全数的例子.在欧几里得《几何原本》卷九中的最后一个定理，就是关于完全数的，它陈述如下：

"如果 $2^n-1$ 是素数，则 $2^{n-1}(2^n-1)$ 是一个完全数."

对于 $n=2$ 我们得到完全数6.对于 $n=4$，由于 $2^4-1$ 不是素数，所以结果不会产生一个完全数.对完全数的探索，古往今来始终困扰着数学家.

直到现在还没有人发现一个奇完全数，也没有一个人能够证明奇完全数不存在①.人们认为欧几里得定理的逆命题：

"每个完全数都有 $2^{n-1}(2^n-1)$ 的形式，这里 $2^n-1$ 是一个素数"

可能成立，但至今没有人能够证明.瑞士数学家欧拉(Leonard Euler，1707—1783)证明了所有偶完全数都应当有这样的形式.

① 原注：这是数论中著名的未解决的问题之一.

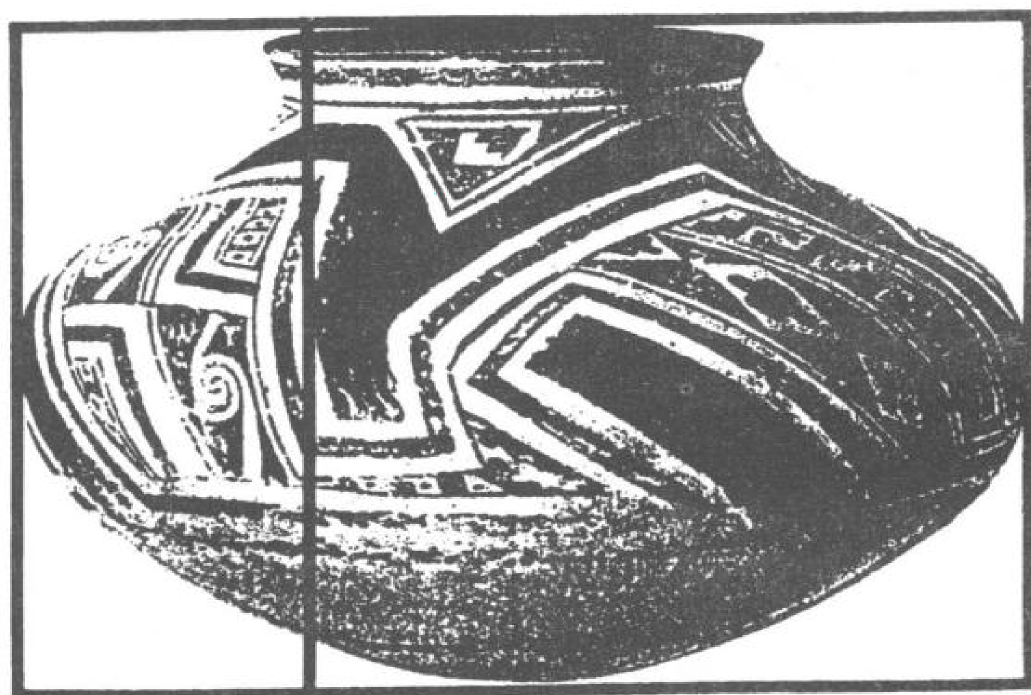
对完全数的探索一直持续到今天[1].

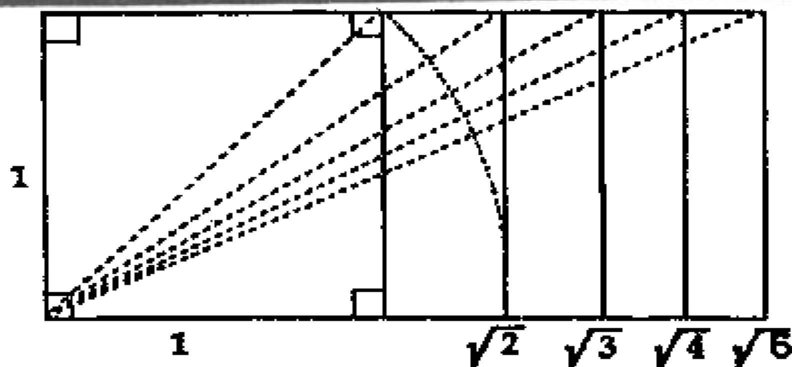
今天,人们藉助于计算机找到了当 $n = 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 7090, 4253, 4423$ 时相应的完全数,这是 $n < 5000$时仅有的几个.此外, $n = 9689, 9941, 11213, 19937$ 时也给出了完全数.你能想象这些完全数有多大.例如,1963 年,伊利诺斯大学发现了对于 $n = 11213$ 时的完全数,它包含 6751 个数字,有 22425 个因子. [112]

① 译者注:至 1998 年 2 月,人们知道的完全数共 37 个.最后一个完全数相应的 $n = 3021377$.

## $\sqrt{2}$ 的动态矩形

动态矩形[1]近来频频出现在许多艺术上.下图我们看到的是一个$\sqrt{2}$矩形如何四面围住一个古代的食物罐,这个食物罐是从吉拉峡谷的漂哀布罗出土的[2].






[113]

① 原注:动态矩形是经由单位正方形逐步产生的一系列矩形.

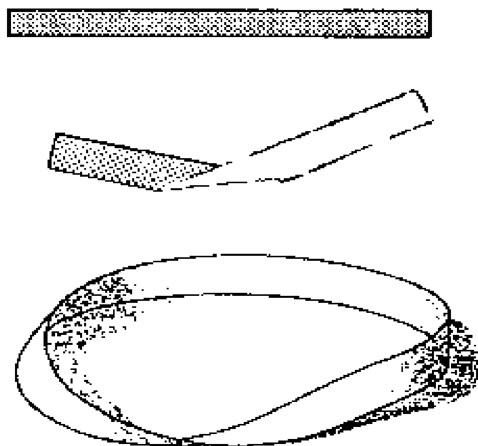
② 原注:该图引自M·雷洛编的《可靠的印地安图案》一书,经Dover出版社同意翻印.

# 如获至宝的莫比乌斯带

虽然德国天文学家莫比乌斯(Augustus Ferdinand Möbius，1790—1868)创造出莫比乌斯带已有143年，但莫比乌斯带的性质依然令人迷惘并刺激人们的想象．公元1858年，莫比乌斯是把他的带作为一种单面单边的对象介绍给大家的．从那时以来，数学家、艺术家、科学家、作家都用莫比乌斯带来检验各自的想象力．这里给出的是他们在工作中的一些发现和记趣．不过，最好的办法是你自己作个模型并欣赏这种奇异对象的特性．

## 莫比乌斯带及其性质

●莫比乌斯带是用一张长方形的纸条扭转半圈并将端头粘接在一起而成的．



●用一把铅笔沿着带子表面的中线描痕，以此测试莫比乌斯带的单面和单边的性质．如果你笔不离纸，那么你能回到原来的出发点吗？在带的边缘上作一个V形的刻痕．然后从这一点开始用手指沿着边缘轻快地移动．如果你手没有离纸，而能通过整个边缘回到原来V形刻痕处，那就证明它只有一个边缘．

●用一把剪刀沿着莫比乌斯带的中心线剪开.结果是否会得到一个圈呢?如果是这样,那么新的圈是单面单边还是两面两边的呢?剪开它,试一试!如果你得到一个圈,那它就不是两面的[1].

[114]

●取一张狭长的矩形纸条并在纸条两面的中间部分用颜色画一根有一定宽度的线.这根有色的线覆盖了整个宽度的三分之一.现在将这样的纸条扭转半圈并粘接两端做成一个莫比乌斯带.再用一把剪刀沿着有色线的边沿把莫比乌斯带剪开(即从莫比乌斯带的边缘三分之一的地方剪).你会得到什么呢?[2]

●拟想一个由某种透明的带所构成的莫比乌斯带的世界.动物生活在这个薄薄的几乎透明的影片带上.设想这样世界里的一只猫,它是像二维的侧面黑色影像那样出现在带上的.这只猫从带上的某一点开始散步,走呀走,终于又走回到出发点.在抵达出发点时,猫会发现自己翻转了一个个儿,就像改变了方向一样.如果它再走一圈会发生什么呢?如果一只二维的右手套沿着猫所走的同一条路移动,当它回到出发点时将变为一只左手套.这个现象类似于一只三维的右手套,经由四维空间变成左手套一样.

●在二维平面上放置两行点对,要使点对中的点两两都连接起来,而又要所连的线段不相交,这未必都有可能.如果点对

---

[1] 原注:如果初始环是扭转 $n$(奇数)个半圈的,那么沿中心线切开后所得的结果是扭转 $2n+2$ 个半圈的环.如果初始环扭转偶数个半圈,那么沿中心线切开后结果会产生两个分离的、更窄的,但却和原来一样的环.

[2] 原注:结果为两个环.一个是涂色的环,其长度与原莫比乌斯带长度相同;另一个长度是原莫比乌斯带的两倍长.如果这些带紧挨在一起,那么表面上会出现三个环,涂色的环似乎与其他两个分离.它还能通过取 3 条同样大小的纸条,将它们叠在一起并扭转半圈,然后再连接相应的端头而成.

是放在莫比乌斯带上你看会怎么样呢？

●作一个扭转两圈的带，并检验它是不是莫比乌斯带．沿着它的中央剪开，最后你会得到一个还是两个环？每个环上各扭转了几个半圈[1]？

●作一个扭转三个半圈的带，并检验它是不是莫比乌斯带．沿着它的中央剪开，最后会得到一个环，它上面带有一个结，这个结是一个三叶形的结．

●取两张一样的长方形纸条，并将它们叠在一起扭转半圈，然后将相应的端头粘接在一起，这就做成了一个“双层”的莫比乌斯带．

这实际上是两条紧偎在一起的莫比乌斯带吗？把你的手指放在带层的中间移动试试看！

——并非紧偎在一起的“双层”圈！你会发现这是一个扭转了四个半圈的环． [115]

——同时沿两者的中间线剪下，结果你会得到两个连着的环．

——做一个新的“双层”莫比乌斯带，并沿着它顶上环的中心线剪开（或用一支铅笔沿中心线画痕）．你将得到两个连着的环．

——“双层”莫比乌斯带的边缘是平行的，并且相异的，对吗？



这个纸条是双面单边纸带．

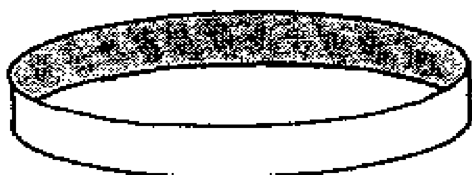
——一种感觉是：“双层”莫比乌斯带可用于获得进入高维空间的通路，因为一个绕着它们中间步行的人会转回到出发点，但此时人却是颠倒的．设想一只蜘蛛开始时沿着“双层”莫比乌斯带的“地板”爬，当它重新回到出发点时它将在天花板上，而要回到地板上则只有再绕着走上一圈．

---

① 原注：两个环，每个环各都扭转了两个半圈．

●如果将两条莫比乌斯带的纵长方向的边粘接在一起,它们将形成著名的克莱因瓶.或将克莱因瓶沿着纵向破开,会形成两条莫比乌斯带.

●莫比乌斯带分为右手系带和左手系带两种,它们之间互为镜像.



这个带是双面双边的带.

## 实 际 应 用

●莫比乌斯分子.

——1981 年,科罗拉多大学的 D·M·瓦尔巴合成了一种莫比乌斯带形式的分子.那是双层梯状的带,由碳和氧的原子组成.科学家们目前正在探索结的数学,以及它们与分子的联系.

[116]

●B·F·古利曲公司拥有一种莫比乌斯传送带的专利.这种传送带使用的寿命更长,而且整个曲面上的磨损和撕裂比一般的带子更加均匀.

●一种两面都记录有声音的莫比乌斯带已由 L·D·弗列斯特于 1923 年设计出来.同样的思路也可用于录音带.

●O·H·哈利获得了一种莫比乌斯研磨带的专利.

●J·W·雅可布斯在 1963 年制造出了一种旨在使机器干燥清洁的莫比乌斯自我洁净器.

●R·L·大卫斯发明了一种无抗电阻莫比乌斯带,并获得了美国原子能委员会的专利.

## 莫比乌斯带在艺术中

●一座钢制的莫比乌斯带雕塑座落在华盛顿地区的史密斯

森历史和技术博物馆.

●M·C·埃舍尔把莫比乌斯带用在他的木刻画《莫比乌斯带Ⅰ》和《莫比乌斯带Ⅱ》中.

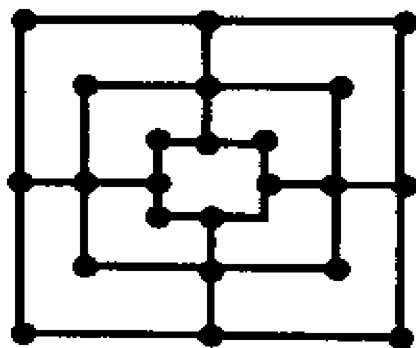
●莫比乌斯带还是以下方面的中心论题,如雕塑、杂志封面(如《纽约州人》)、邮票和绘画艺术等.

●莫比乌斯带已被采用于许多小说中.如在《星际航行,下一代》中的情节"时间拐弯"中,就用上了莫比乌斯带的观念. [117]

# 欧维德游戏

数学是一种思维的方法,其影响的范围,及于世间非常宽阔而多样的领域.下面讲的是一种游戏,它玩起来也需要用数学加以分析.

我们对"吃井字"①游戏全都非常熟悉.这是"吃井字"游戏的一种变化,它的出现可以追溯到多才多艺的罗马诗人欧维德(Ovid,公元前43年—公元17年)的作品.欧维德游戏和游戏盘的变化(如右图的"磨坊"游戏)是在雅典卫城的台阶、埃托斯坎陶器场以及罗马瓷砖上发现的.在英国,"磨坊"游戏又以"九人摩尔舞"著称(可能因为玩法跟摩尔人跳舞有点相似).在莎士比亚的《仲夏夜之梦》中就提到"九人摩尔舞",在那里棋盘是画在一方草地上,而用九块石头做棋子.



"磨坊"游戏的盘.

"九人摩尔舞的棋子用泥块充当"

(第Ⅱ幕,第2场,台词98)

[118]

**欧维德游戏:**

这是一个两人的游戏.

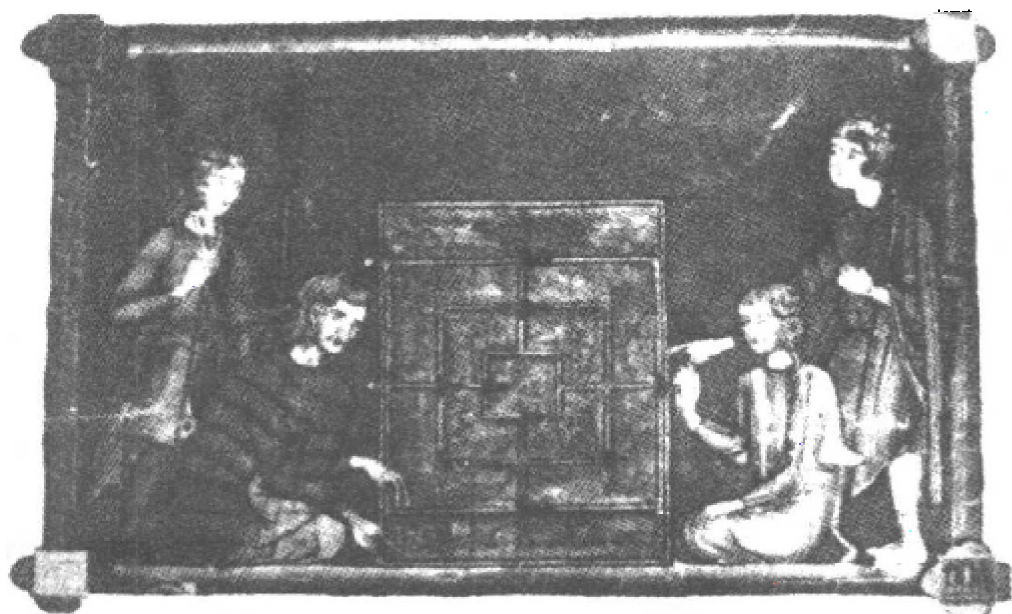
●每人有三个棋子.

●游戏的目标是将自己的三个棋子排成一行.

●两人轮流放置各自的棋子.

●如果没有人能将自己的三个棋子排成一行,那么每个人

① 译者注:"吃井字"游戏在英语中称为"tic - tac - toe".这是一种二人对局的儿童游戏,棋盘同于欧维德游戏盘,即九方格或井字格.二人轮流在盘上划十字或圆圈,以所划记号三个成一直线者为胜.



上图说明人们正在玩"九人摩尔舞".该画引自西班牙阿丰索十世的游戏书.

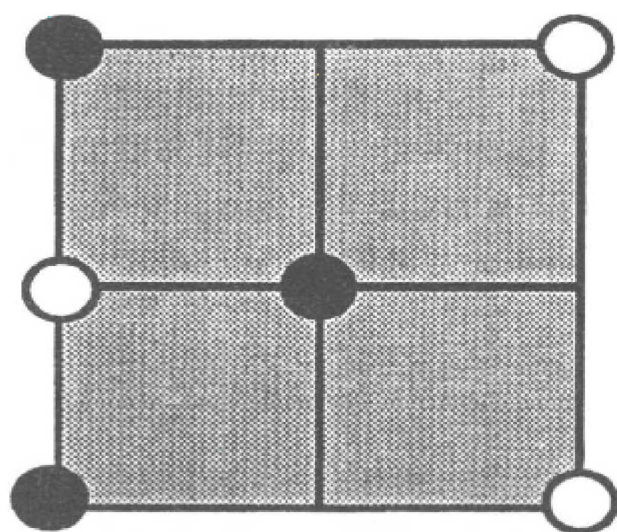
都能移动自己的一个棋子到邻近未被占据的地方,直至某人把他自己的三个棋子排成一线.

在你对以上规则琢磨出一种策略之后,试添加以下的限制看看会发生什么:

●任何人开局都不能把棋子放在中央.

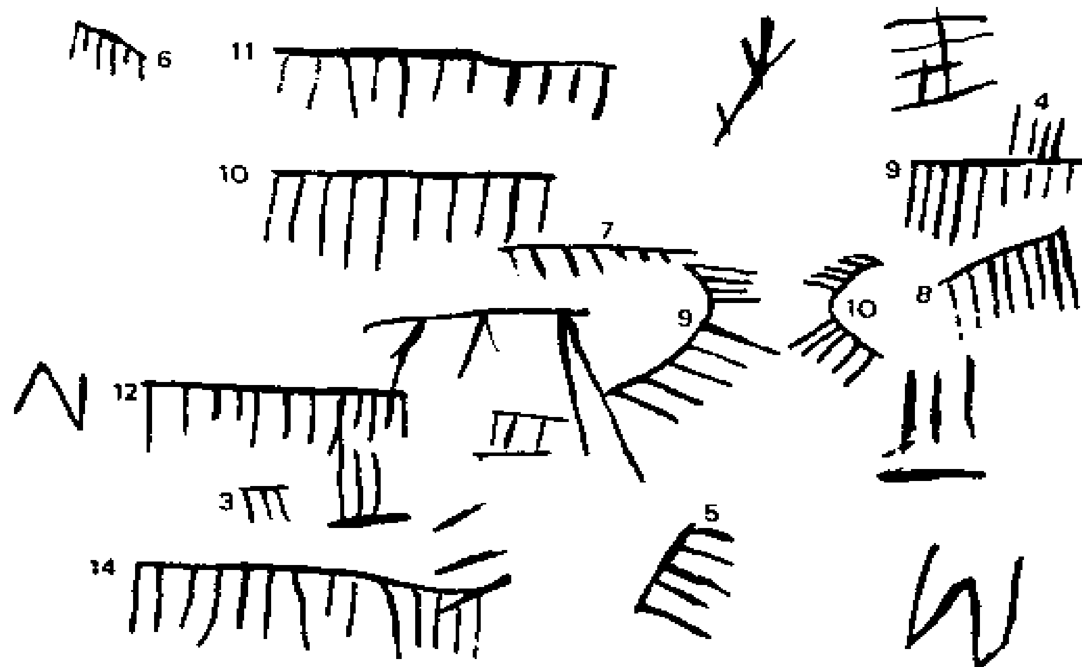
**欧维德游戏的盘:**

棋盘上显示两个选手已放好了各自的棋子,但没有人做到让三个棋子排成一行.在这种情况下,选手们开始沿着线移动自己的棋子,直至其中一人成功地将自己的三个棋子排成一行.



## 石器时代的数的式样

下面这些记号是二万五千年前的某个艺术家在一个山洞壁上画的.它可能是一种乱画的符号或图案,也可能是一种最早的数的表示.



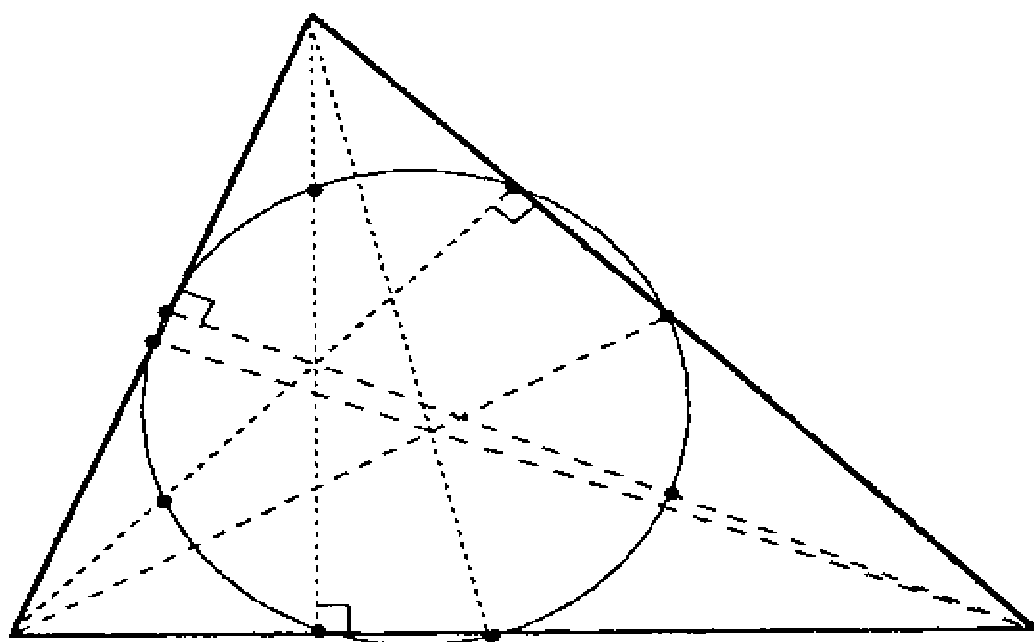

在西班牙的拉·皮勒塔发现的石器时代的数的式样.

在西班牙南部的拉·皮勒塔洞穴,在二万五千年前曾居住过一些早期的人类.在洞中人们发现了一些画和人工制品.从发现的一些人体骨架和武器,表明该洞在青铜器时代(公元前 1500 年)依然有人居住.在那里发现的陶器块,使人深信那是欧洲现存的最为古老的陶制品,其时间大约可以追溯到新石器时期(第 3 个一千年).

[120]

# 九　点　圆

九点圆是一个与三角形的某些部位相关联的概念，只凭感觉人们是很难把它们联系在一起的．这个圆由C·J·布里安桑(Charles Julien Brianchon，1783—1864)和J·V·彭色列(Jean Victor Poncelet，1788—1867)发现的．



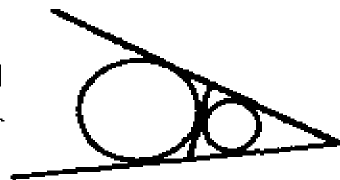
他们发现——

每个三角形都有一个圆，它通过：三角形高线的3个垂足；三角形边的3个中点；以及垂心(三角形三条高线的交点)到顶点的三条线段的3个中点．

此后，公元1822年，K·W·费尔巴哈证明了三角形的九点圆

与其内切圆及旁切圆之间存在着充满魅力的关系.他证明了三[121]角形的九点圆同时切于三角形的内切圆和它的三个旁切圆.①

① 原注:三角形的内切圆是指位于三角形内部而切于它三边的圆,而旁切圆是指切于三角形一边和另两边延长线的圆(见右图).



# 建筑学与数学

千百年来，数学已成为设计和构图的无价工具.它既是建筑设计的智力资源，也是减少试验、消除技术差错的手段.下面并列的是古往今来建筑中常用的数学概念：

- 棱锥
- 棱柱
- 黄金矩形
- 视幻觉
- 立方体
- 多面体
- 短程式圆顶
- 三角形
- 毕达哥拉斯定理
- 正方形、矩形、平行四边形
- 圆、半圆
- 球、半球
- 多边形
- 角
- 对称
- 抛物曲线
- 悬链线
- 双曲抛物面体
- 比例
- 弧
- 引力中心
- 螺线
- 螺旋
- 椭圆
- 镶嵌
- 透视

一座建筑物的设计是受周围环境、材料的类型和有效性、想象力和资金等因素的影响.而在上述基础上才可能着手构画建筑图案.下面是一些历史上著名的例子——

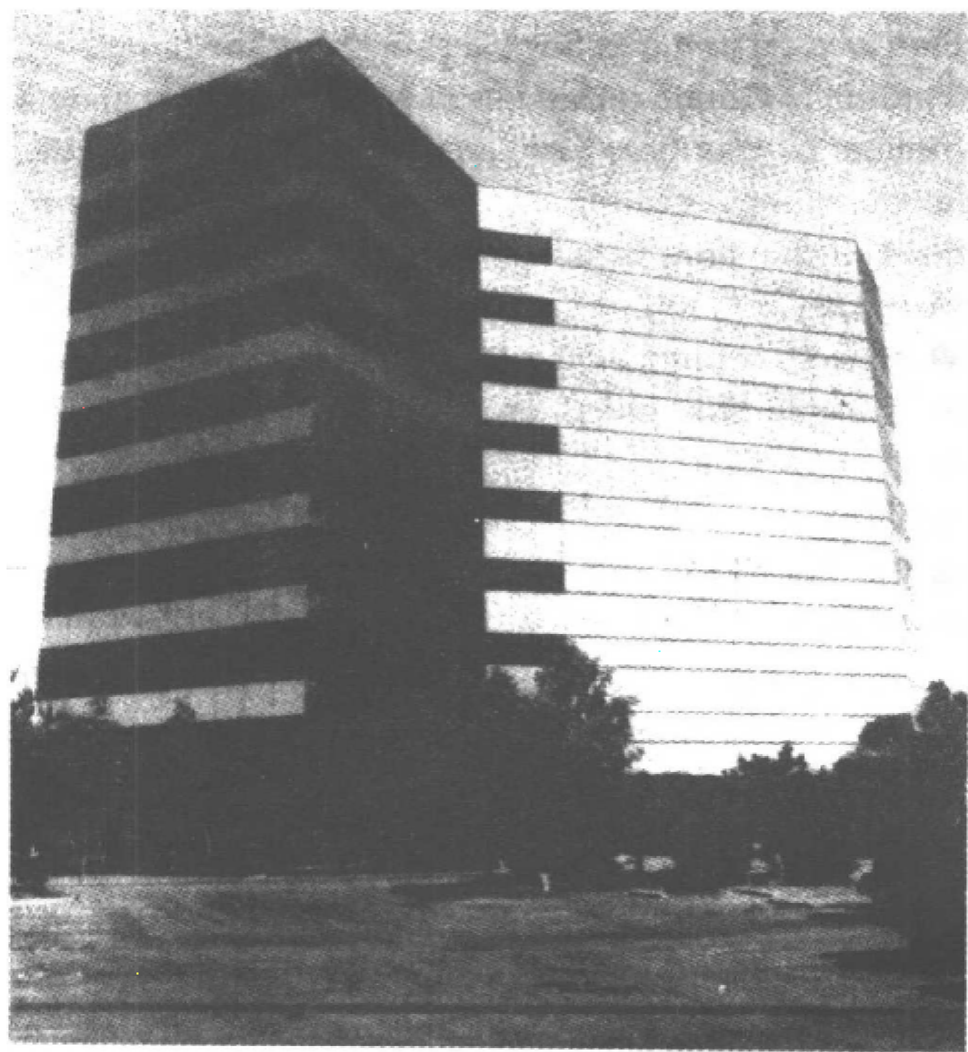
●埃及、墨西哥和犹加敦的金字塔构造中石头的形状、大小、重量、排列等计算工作，需要依靠直角三角形、正方形、毕达哥拉斯定理、体积以及估算等知识.

●麦加皮克楚的图案的整齐和均匀没有几何计划是不可能的.

●巴特农神殿的构造需要用到黄金矩形、视幻觉、精密测量、比例知识以及按准确的规格切割圆柱(总使直径为柱高的三分之一)，等等. [122]

●伊壁道斯的古代戏院的设计和布置,其几何的精密性是经过特殊计算的,它不仅增强了声响效果,而且使观众的视野达到极大值.

●运用圆、半圆、半球和弧等方面的变化和革新已成为古罗马主流的数学思想,并为罗马建筑师们所广泛采用和完善.



用玻璃并由种种形状和角度建造的建筑物(加利福尼亚的弗斯特城),在一天里的不同时间,从不同的角度和地点,观察者都能观察到不同的变化.它与环境交相辉映,令人叹为观止.

● 拜占庭时期的建筑师们将正方形、圆、立方体和带拱的半球等概念优雅地组合起来，就像他们在康士坦丁堡的圣·索菲娅教堂里所运用的那样. [123]

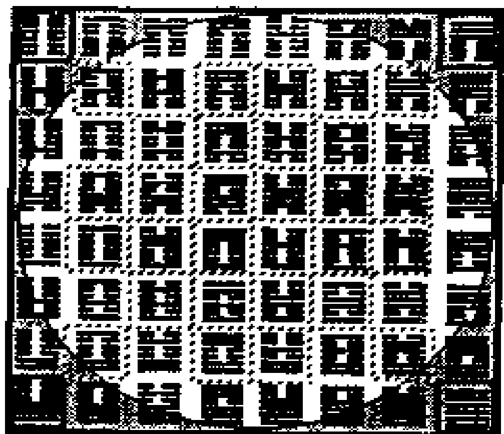
● 哥德式教堂的建筑师们用数学确定地球的引力中心，并设计了拱形的天花板，使天花板上拱形的交点正对着隐匿在地底下的巨大的用石头构建的重物.

● 文艺复兴时期的石建筑物，显示了一种在明暗和虚实等方面都堪称精美和文雅的对称.

随着新建筑材料的发现，适应于这些材料最大潜力发挥的新的数学思想也应运而生. 用各种各样可以得到的建筑材料，诸如石头、木材、砖块、混凝土、铁、钢、玻璃、合成材料(如塑胶、强力水泥、速凝水泥)等等，建筑师们能够设计出实质为任何形状的建筑物. 在近代，我们能亲眼见到双曲抛物体形式的建筑物(旧金山圣·玛丽大教堂)、B·富勒的短程式构造、P·索罗里的易于分离和结合的设计、抛物线型的机棚、模仿游牧部落帐篷的立体组合结构、支撑东京奥林匹克运动大厅的悬链线缆，以及带有椭圆顶天花板的八角形房屋等等. 建筑是一门正在发展中的科学. 建筑师们研究、提炼、提高，并对过去和新产生的一些想法重新加以筛理，终于使自己能够自由地想象任何的设计，只要数学和材料能够支持这样的构造. [124]

## 《易经》与二进制系统

《易经》的含义为"变化的启示",它是世界上最古老的书籍之一,表达了古代中国人的一种哲学.这种哲学包括心理学、日历以及某些变化的启示.虽然《易经》的最早起源并不清楚,但它出现的日期至少可追溯到公元前8世纪.一种由六条水平线段构成的六线形(实的线段为"阳的",中间断开的线段为"阴的")是它的原型结构,阴阳交换可形成全部64种六线形序列.



数学家、科学家、哲学家、语言学家和外交官G·W·莱布尼兹(Gottfried Wilhelm Leibniz,1646—1716)在他1679年发表的一篇论文《二进制的发展》中首先论述了二进制系统.在1697到1702年间,他跟一位在中国的传道士P·J·伯维特经常通信.通过伯维特,莱布尼兹学习了《易经》的六线形,后者与他的二进制系统紧密关联.他注意到,如果把每个断开的线段作为0,而未断开的线段作为1,则六线形就呈示为二进制数.

例如,依次取六线形,我们发现:
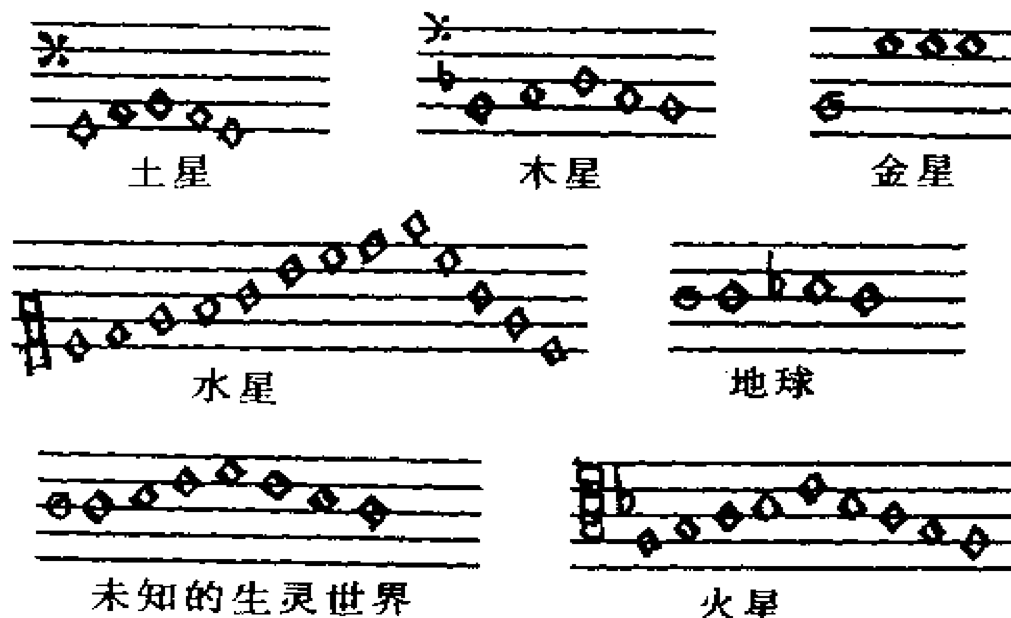
$0_{(2)}=$ 　 $1_{(2)}=$ 　 $10_{(2)}=$ 　 $11_{(2)}=$ 　 $100_{(2)}=$ 　 $101_{(2)}=$

0 　 1 　 2 　 3 　 4 　 5

虽然莱布尼兹和伯维特都感觉中国人在《易经》中发现了二进制系统,但还没有更有力的证据能表明这一点.[125]

# 天体的音乐

在古代希腊，数学、音乐和天文学是学校学习的公共课程．毕达哥拉斯的信徒们把数和音乐的音阶相联系．基于他们的数学、音乐及行星轨道方面的知识，他们形成了一种“天体音乐”的观念，这种观念把音乐和天文学牵连在一起．



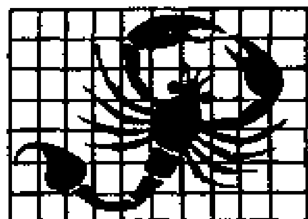

开普勒(Johannes Kepler，1571—1630)感到需要找出一些宇宙所遵从的规则及概念间的内在联系．他在1618年出版的《世界的和声》一书中，将行星在它们椭圆轨道上的速度跟音乐的和声联系起来①．他将行星的最大与最小速度跟音乐的音阶发生关系．他认为，使古希腊“天体的音乐”理想化是最大的成就之一．

[126]

① 原注：今天，把天文学和音乐之间牵扯上关系是没有科学意义的．但当时开普勒在这方面的工作却导致了许多有价值的天文发现，例如，开普勒对地球在它的椭圆轨道上运行速度的计算等等．

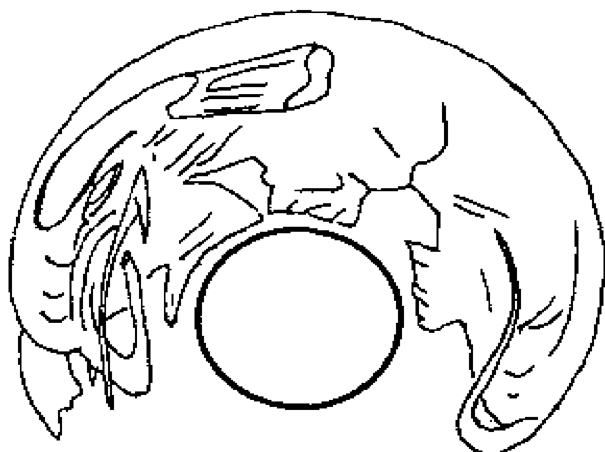
## 合成艺术

合成艺术是一种使影像歪曲变形的艺术.从某种意义上讲,剪影也算合成艺术的一种类型,这是因为一个人的影子是他实际身体形状的变形.这种艺术类型是为了娱乐及隐匿目标这两者而创造的.例如,在英王乔治一世和乔治二世统治期间,一位王位觊觎者C·E·斯图亚特的艺术肖像被其支持者用作表达他们忠心的标记.这种艺术还被用于传播政治主张,或用作恋爱和情欲的表白.此外,在18和19世纪,合成画还像玩具一样连同"歪像改正镜"(一种圆筒形或锥形的镜子)一起出售.



一只歪曲变形的蝎子



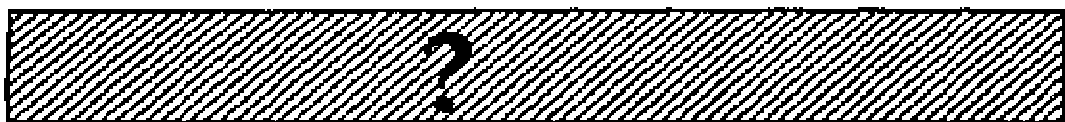


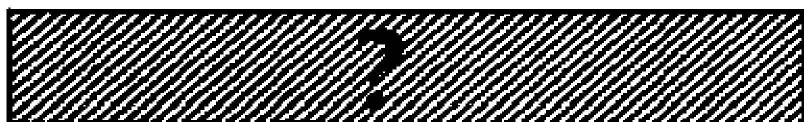
用一张聚酯薄膜做的圆筒观察这只大象.

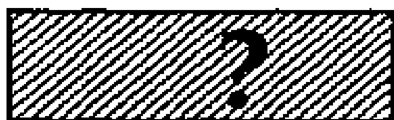
投影几何的技巧可用于创造合成画.艺术家们通过一个歪曲的平面,或在一个圆筒或圆锥形的管子上使影像扭曲变形.法国人J·F·尼塞隆在他的书《透视探奇》(1638)中表述了他在创作合成艺术方面的技巧.自从扭曲变形可以很容易地用计算机[127]创作以来,合成艺术似乎经历了一次复兴.

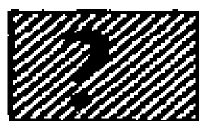
# 测 量 问 题

如果允许你选择四把固定长度的直尺，那么你要选怎样的长度才能测量从 1 个单位到 40 个单位这些整数单位的距离？在测量你想要的距离时，你所用的尺子每把使用次数不能多于一次．









例如，你如果选 1 单位、2 单位和 4 单位的直尺，那么你所能测量的最大距离将是 7——

1 单位 + 2 单位 + 4 单位

3 单位的距离可由以下两种方法测量——

4 单位 − 1 单位　　　　1 单位 + 2 单位

怎样的四个尺寸的直尺才能选作测量从 1 到 40 单位的整数长度呢？

（解答见附录）

# 一幅文艺复兴时期的幻觉作品



# 倒　转

对称充斥于自然界和数学.在许多结构中,对称是一种天然的成份,就像在一个六角形或一片枫树叶的形状中所显示的那样.

我们发现,倒转将呈现又一种世界.字母或词的形式起初未

引自S·基姆的《倒转》一书,该书由W·H·弗里曼出版发行(1989).

必都具有对称性,但由于S·基姆的智巧,使它们变得具有迷人的形状和风格.一个具有倒转性质的词,写起来具有一种或多种对称的形式.就数学观念而言,这种对称表现在字母或词的形状和位置上.我们还发现,有时一个具有倒转性质的词有着更加丰富的内涵.

研究上图的倒转,你能看到一个颠倒的词.把这一页倒转过来,你看到什么?(S·基姆作于1989)

S·基姆是一位文字书写设计师、计算机专家和数学家.I·阿西莫夫形容他是“字母表的雕塑家”.

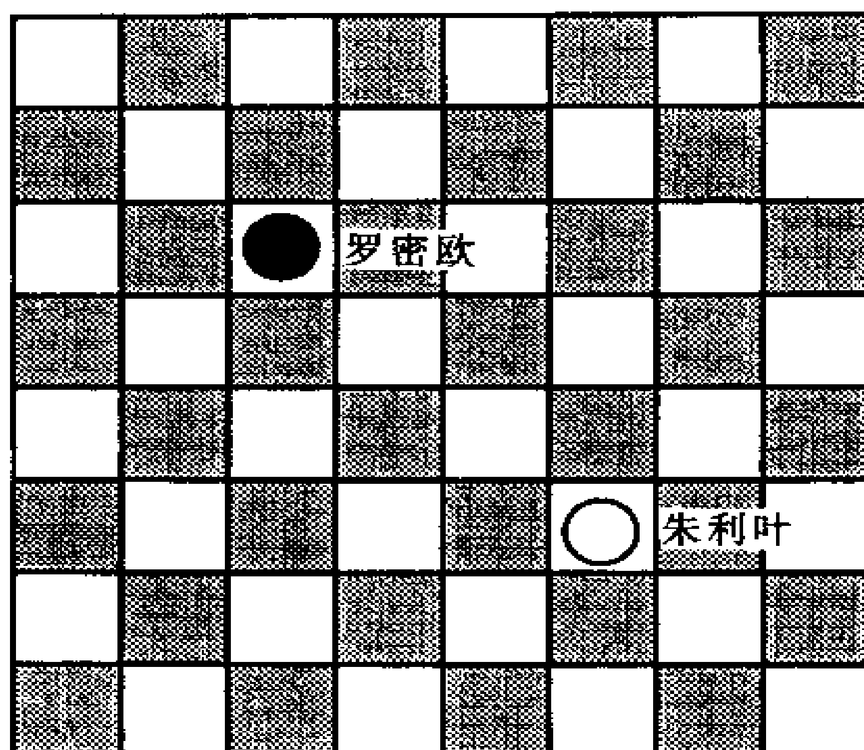


请把一面镜子垂直地放在“i”的地方.(S·基姆作于1989)

[130]

# 罗密欧和朱利叶谜题

罗密欧和朱利叶谜题出现在《坎特伯雷谜题集》(1907)中，该书出自英国著名的谜题专家H·杜登尼(Henry Dudeney，1847—1930).

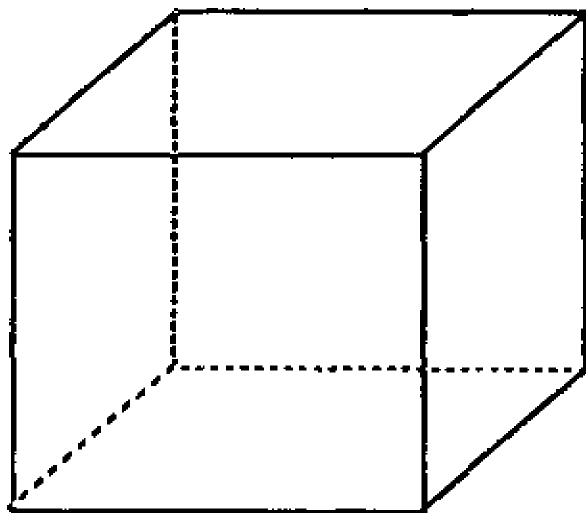



罗密欧必须找出一条通向朱利叶的路.在抵达朱利叶之前他必须通过所有的方格各一次，而且还要使到达朱利叶转弯的次数最少.

(解答见附录)

## 什么是“平均”?

在算术平均值与调和平均值之间有一种古老的联系.毕达哥拉斯的信徒们研究了音调和数的比值之间的关系.他们发现:一根长为12的弦如果缩短到$\frac{3}{4}$的长度,那么会弹出原调的第四音;如果取原来的$\frac{2}{3}$长度,那么它会弹出原调的第五音;如果取原来的$\frac{1}{2}$长度,那么弹出的音比原调高八度,即高一个音阶.这里弦的长度用数表示为12,9,8和6.令人惊奇的是,这些数也跟它们的算术平均值及调和平均值相联系.即9是6与12的算术平均值,而8是6与12的调和平均数.此外,毕达哥拉斯信徒们还把正方体称为调和体,这是因为6,8和12分别是正方体的面数、顶点数和棱数.



调　和　体

*　　*　　*

让我们看一看“平均”一词在数学中的不同含义.

毕达哥拉斯所定义的“算术平均值”,是指这样一个数,它超过第一个数的量正好等于第二个数超过它的量.也就是说,求算

术平均值就是求两数中间的值.对给定的两个数 $a$ 和 $b$,其算术 [132] 平均值为$\frac{a+b}{2}$.今天,我们常称这个平均值为平均数.

求 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 的算术平均值.

我们先求所有项的和,然后再除以项数,得出

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}.$$

$a$ 和 $b$ 的"几何平均值"$c$ 可由下式确定:$\frac{c-a}{b-c}=\frac{a}{c}$.今天这种定义等价于 $c=\sqrt{ab}$ 或$\frac{a}{c}=\frac{c}{b}$,并且可以在各种几何问题中找到,诸如直角三角形斜边上的高以及黄金矩形的黄金平均值等等.

求 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 的几何平均值.

我们先求所有项的积,然后再求积的 $n$ 次方根,即

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}.$$

"调和平均值"$H$ 可由下式确定:$\frac{H-a}{b-H}=\frac{a}{b}$.今天,它的定义是$\frac{1}{H}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.另一种思路是,调和平均值是倒数的算术平均值的倒数.

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 的调和平均值为:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$ [133]

# 数学间的联系

发现众多数学思想之间的相互联系是没有什么值得奇怪的.数学是在先前发展的概念的基础上逐渐扩展的,任何数学体系的形成都是从一些未加阐明的术语和公理(假定)开始的,接下去的步骤是定义、定理、更多的公理等等.然而,历史表明,对于创造力的获得这并非是一条必须的路.例如,欧几里得几何并不是由欧几里得的书《几何原本》开始的.相反地,欧几里得是在研究、编辑和组织了在他之前数学家所发现的几何内容之后才写出他的书的.他是将这些几何思想系统归类并加以逻辑演绎而成的.

有许多数学分支似乎是彼此独立的,但只要仔细地观察就能发现其中一些明显的联系.而了解和发现这些联系将令人兴奋不已.

考虑以下的概念:

——帕斯卡三角形、牛顿二项展开式、斐波那契数列、概率、黄金均值、黄金矩形、等角螺线、黄金三角形、五角星形、极限、无穷数列、柏拉图体、正十边形——

所有上述发现都是由不同的人,在不同的时间,不同的地点作出的.但这些概念之间都由一条线联系着.

帕斯卡三角形是在帕斯卡(Blaise Pascal,1623—1662)之后命名的,虽然有关它的更早的记录出现在公元1303年刊行的一本中国的书上.帕斯卡三角形的每一项都是它上方两侧的两个数的和.它的每一行则表示二项式$(a+b)^n$的某一特殊次方展开的系数.如第3行给出$(a+b)^3$展开的系数.第$n$行则给出牛顿二项展开公式.

[134]

在帕斯卡三角形中，如图所示①的对角线上的数的和为斐波那契数．后者与自然界的许多形式和现象相联系．在帕斯卡三角形中还可以找到许多其他数的集合．

——如自然数、三角形数、平方数、四面体数、四维空间四面体数、五维空间四面体数、……②

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^n b^n$ 牛顿二项展开公式

概率则以不同的方式与帕斯卡三角形相连系．当小球从一个用六角形砖做成的帕斯卡三角形顶上的贮罐里往下落时，便形成了正态分布曲线．对于每个六角砖而言，小球往左边落或往右边落的机会是相同的．如果在底部将小球收集起来，那么它们将按帕斯卡三角形的数分布，并形成钟型的概率的正态分布曲线．拉普拉斯（Pierre Simon

① 原注：斐波那契数是一个数的序列，它是斐波那契在他的著作《算盘书》中为解决他所提出的一个问题时引出的．斐波那契又名列奥纳多·达·比萨（1175—1250），他的《算盘书》在 19 世纪由法国数学家 E·鲁卡斯编辑再版．

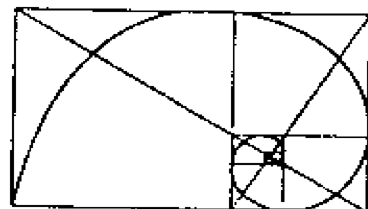
② 原注：参见第 56 页图，那里有许多不同的数出现在帕斯卡三角形里．

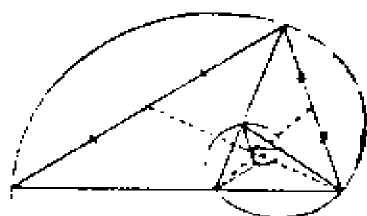
Laplace,1749—1827)把事件的概率定义为:事件的发生数与所有可能发生的事件的总数的比.帕斯卡三角形则能够用来计算不同的结合数和可能结合的总数.例如,掷四枚硬币,其正反面可能的结合如下:四次均正 1 次;三正一反 4 次;两正两反 6 次;
[135] 一正三反 4 次;四次均反 1 次.这些数相当于帕斯卡三角形顶上数下来的第三行——1,4,6,4,1——它表示了可能的结果.这种可能的结果的总数,即和 $1+4+6+4+1=16$.于是我们便可求出掷币时出现三正一反的概率为$\frac{4}{16}$.

黄金平均值和黄金矩形(为古希腊的建筑和艺术所用)是通过斐波那契数列与帕斯卡三角形和概率相联系的.当斐波那契数列(1,1,2,3,5,8,13,21,34,…)相继项的比构成一个新的数列时,我们得到:

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\cdots,\frac{F_n}{F_n-1},\cdots$$

该数列的每一项或稍大于或稍小于黄金平均值.事实上该数列的极限即为黄金均值$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})=1.618\cdots$,它也是黄金矩形边的比.


黄金矩形与等角螺线


黄金三角形与等角螺线

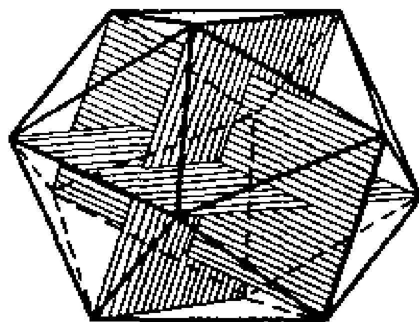
等角螺线可由黄金矩形的图引出:从一个黄金矩形开始,在内部如上图自我产生一系列其他的黄金矩形.等角螺线则由这些黄金矩形构成.黄金矩形的对角线交点即为等角螺线的中心或极点.

黄金均值又与黄金三角形联系在一起.黄金三角形是底角为 72°、顶角 36°的等腰三角形,它也能自我产生等角螺线.

[136] 黄金三角形跟五角星之间有着直接联系.五角星的五个点

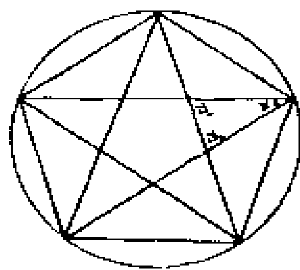
也是黄金三角形的顶点.我们关注的是$\frac{F_n}{F_{n-1}} \to \phi$这一极限是怎样出现在图中,这里$\phi$是黄金均值的符号,它也可以由其他无穷数列产生.

黄金矩形还可以用来画柏拉图体的二十面体和十二面体.



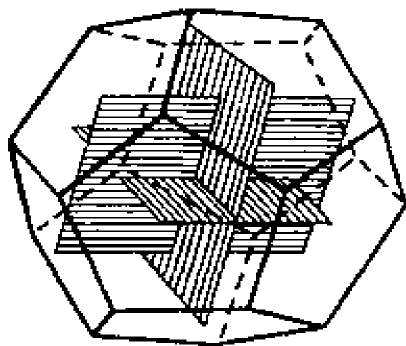
黄金矩形与正二十面体

二十面体是有20个面的正的凸多面体,它可由3个全等的黄金矩形组成,这3个黄金矩形互相垂直且对称相交,它们的12个顶点即二十面体的顶点.十二面体是有12个面的正凸多面体,它也能由3个全等的黄金矩形组成,这次12个顶点是十二面体面的中心.



黄金三角形与五边形和五角星形

最后,黄金均值还跟正十边形的外接圆半径与边的比相联系,因为正十边形能够剖分为10个黄金三角形,每个三角形都以圆心作为它的顶点.



黄金矩形与正十二面体

以上这些联系是通过千百年时间逐渐形成的.正如我们大家看到的那样,有一条共同的线贯穿着这些数学概念,这难道不令人兴奋和惊异吗?

## 素数的特性

在数的王国中，素数似乎处于一种非常特殊的位置．每一个数都有唯一的素因子分解式．例如，12 的素因子分解式是 2·2·3，而 18 的素因子分解式是 3·3·2．

以下是一些素数特有的性质：

1）2 是唯一的偶素数．

2）没有比 5 大的素数能够以 5 为结尾．

3）在素数(2,3,5,7)之后，其他的素数必须以 1,3,7,9 为结尾．

4）两个素数的积绝不会是一个完全平方数．

5）如果将 2 和 3 以外的素数加上 1 或减去 1，其结果必有一个被 6 整除．

**2, 3, 5, 7, 11, 13,**
**17, 19, 23, 29,**
**31, 37, 41, 43,**
**47, 53, 59, 61,...**

多少世纪以来，素数引起数学家们的浓厚兴趣．C·哥德巴赫(Christian Goldbach，1690—1764)曾写信给欧拉，说他坚信每个比 2 大的偶数都能够表示为另两个素数的和，例如：$6=3+3$；$8=5+3$；$28=23+5$．

对此，你是怎样想的呢？

欧拉没有能够证明它，也无法予以否定．这个问题至今仍未解决！

[138]

# π 不是一块饼

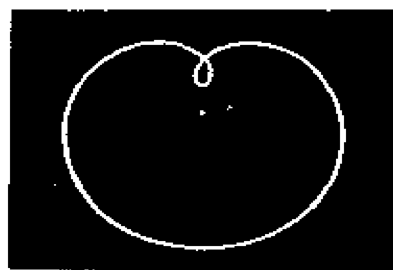
几个世纪来，对 π 估值的竞赛一直在继续. 这里似乎没有冬天，有的只是一条无尽的探索之路！π 的估值的位数在不断地增多. 由 G·楚得诺夫斯基和 D·楚得诺夫斯基达到的 5 亿 3 千万位似乎是一个纪录，但没保持多久便被金田康正的纪录所打破. 金田康正在1989年8月把 π 算到了536 870 000 位. 这个 π 值填满了 110 000 张计算机纸，并在日本最快的超级计算机上用了 67 小时又 13 分钟.

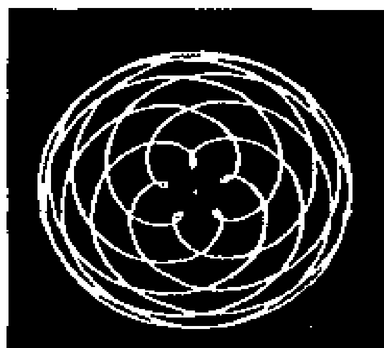
这种景观是否有一个尽头？如果计算机的能力和容量都发挥殆尽，那么对 π 的估值或许也能就此休止！

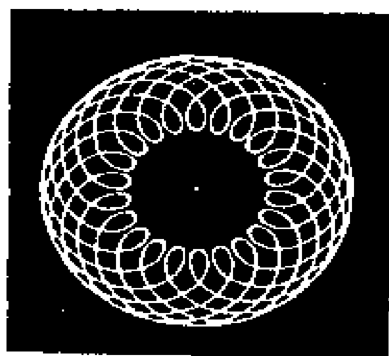
3.1415926535 8979
3238462643383279
5028841971693993
7510582097494459
2307816406286208
9986280348253421
1706798214808651
32823066...

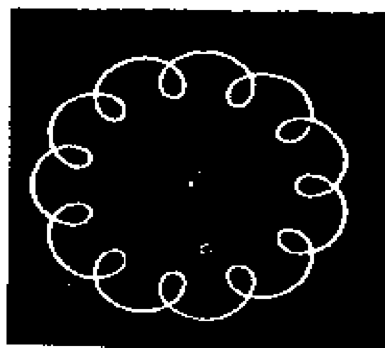
## 行星的不寻常轨线

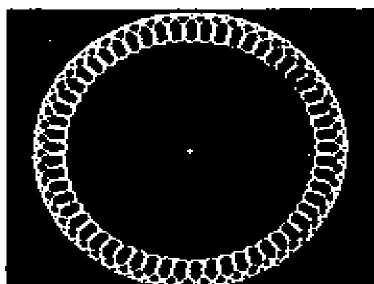
下面这些令人叹为观止的对称图案,是人们看到的行星体描出的运动轨线.按通常的想法人们总以为行星的轨线只能是椭圆形的,然而下图的的确确是从地球看去,土星、木星、火星、金星和水星所描画出的路线!







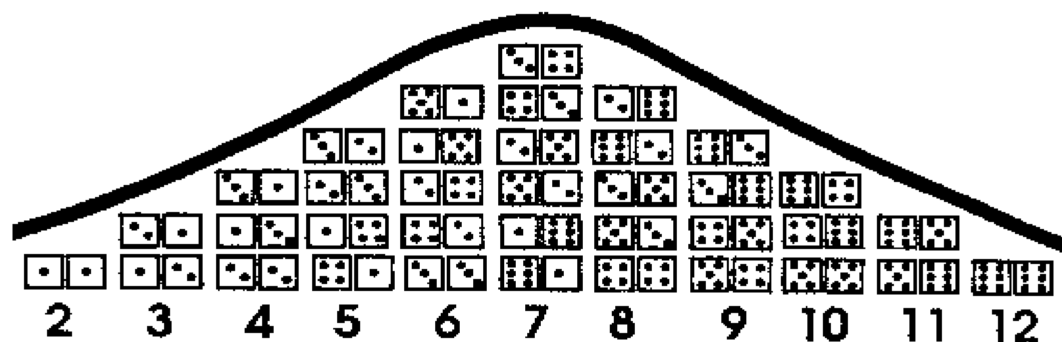




# 骰子与高斯曲线

正态分布曲线最早在16世纪的后半叶为法国数学家A·棣莫弗所注意.在19世纪,高斯对此作了进一步的发展,确定了曲线的方程,而高斯曲线的名称也由此而生.

下图显示了当掷一对骰子时出现的36种可能的结果.如果注意到掷出不同数目(从2到12)的频率,那将十分有趣,因为它呈示出高斯曲线!




用一对骰子掷出的从2到12的不同方法数.

[141]

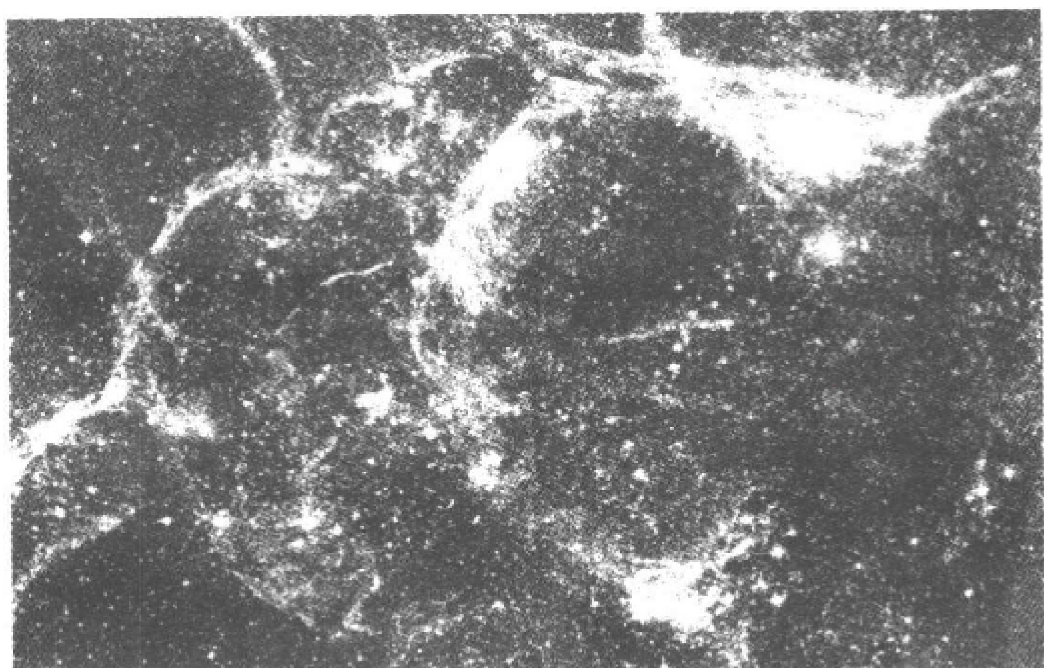
## 数学在"万有理论"中的作用

宇宙是怎样开始的?你能对这个至关重要的问题作出回答吗?在对TOE(万有理论)的不停的探索中,科学家们试图发展一种数学模型,这种模型能使自然力(电磁力、引力、强作用力和弱作用力等等)合而为一.物理学家相信TOE理论是能够找到的.有些人为了追求答案甚至献出了自己的生命.在今天最流行的TOE中,物理学家相信宇宙的本质与一种叫"超弦"的对象联系在一起.TOE的一个论点是,主张宇宙全然由物质和能量组成,它是从一次突然爆炸后由超弦的交互作用形成的."超弦理论"所描述的宇宙是一种十维空间(九个空间维和一个时间维),空间中具有物质和能量的建筑砖块便是无穷小弦.该理论进一步推测:在大爆炸的时刻里九个空间维是相等的,但只有其中的三个空间维随着宇宙的膨胀而膨胀.其余的六维则保持卷缠并被包容于只有$10^{-33}$厘米跨度的精细几何体里(也就是说,这样的几何体$10^{33}$个摆在一起从一头量到另一头只有1厘米).因此,这些弦的内部应该具有六维.现在,科学家们正试图用六维的拓扑模型来描述它们.人们相信这些超弦能够是开的或闭的环,并由不同的物质和能量构成,而这些宇宙的物质和能量是由自身的振动及旋转变化而产生的.换句话说,超弦是根据它们之间如何振动和旋转相区别的.

[142]

超弦理论的重要性在于它与爱因斯坦广义相对论的比较.四维的想象是相当困难的.爱因斯坦所提出的长度、宽度、高度和时间,对于描述一个物体在宇宙中的位置无疑是必须的.十维似乎离开了这个问题.但如果人们把维作为描述一个物体在宇宙中精确位置的数,那么它就变得易于理解了!

有关TOE的观念演进了近20年.引力理论使该机制出现转机,因为计算(含引力计算)必需支持该理论的各种形式,尤其



数学在解释宇宙和万有理论中起主要的作用.

是产生数学上的无限①.突破性的进展出现于 1974 年,当时 J·施瓦茨和 J·施厄克把引力作为十维空间中使空间产生弯曲的几何片断,类似于爱因斯坦在四维空间的几何中所描述的引力. [143]

数学对于 TOE 的超弦理论的支持是强有力的,其结果也是令人信服的.施瓦茨和 M·格林是这一理论的两个主要创始人.他们在这方面的工作超过了十年.遗憾的是,他们没有能够从他们的同事那里博得鼓励和支持,因为后者对于十维空间感到难于接受.不过,他们所发表的论文却引起物理学家们严肃和认真的思考.一些科学家主张物理学家要对这种思路采取回避态度("浪费"时间),因为它所用到的数学太难了! 超对称性、六维拓扑模型、十维宇宙、无穷小弦等等,都是一些需要加以描述和确

① 原注:数学的无限可以由这样的运算产生,如用 0 除一个数等等.

认的理论概念.结果,这一理论使一些物理学家转为数学家,而又使一些数学家转为物理学家.[144]

# 数学与地图绘制

我们全都知道地球并非扁平的，但为了携带方便，我们把地图描在一张长方形的纸上.由于地球类似于球体，因而画在球面上的地图是最精密的地图.一幅球面的地图显示出：

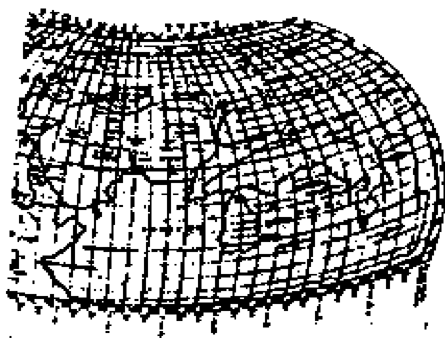
——所有经线长度都相等而且相交于极点；

——所有的纬线都平行；

——纬线环绕着球体，越近极点变得越小；

——两经线夹在任意两条纬线间的距离相等；

——纬线与经线相交成直角.

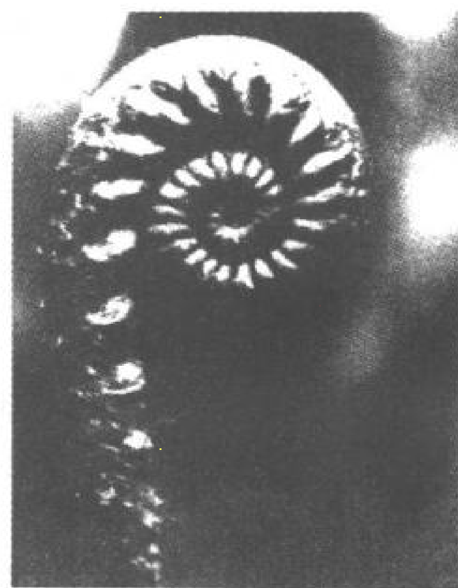


这是一张公元1561年由一位威尼斯绘制地图的人所画的托勒密世界地图的一部分.

然而，在一张扁平的纸上是不可能画出一张精确的地图的.结果球形地图的投影也就应运而生.不同类型的投影会使地图上某个特殊的区域较为精确.投影几何的概念对于创作不同的地图是非常有用的.例如，麦卡脱式投影(柱状或管状投影)对于接近赤道的区域是较为精确的.麦卡脱式投影的经线并不交汇于极点，因而接近极点的地域显得比实际要来得大.另一方面，天顶投影却能使极点地区较为精确.在地图绘制中也用到其他类型的投影，诸如方位投影、圆锥投影、正弦投影、等积比投影、断续投影等等.但如果我们用了某种投影，那么地图上必然会有一些部分产生歪曲.这就解释了为什么领航员对不同的区域及不同的领航种类(空中或海洋)需要用不同的地图或地图的结合.没有投影几何、比例、绘图学以及球面几何等知识，地图的绘制只能停留在原始的阶段.

## 螺线——数学在自然界中

螺线的类型几乎与它在自然界和生活中出现的频数一样多.有扁平螺线、三维螺线、右旋和左旋螺线、等角螺线、几何螺线、对数螺线、矩形螺线等等.当人们想到曲线时,最常浮现在脑海的是圆和椭圆.但还有一些曲线也大量存在于数学里或出现于自然界及自然现象的生成图案中.螺线便属于这种范畴.



羊齿植物构造中的螺线.

螺线的特性要通过与圆的比较才能有深刻的感受.绕圆一周的距离(即周长)是有限的.圆还是一条封闭的曲线,圆上的所有点都跟圆心等距离.而另一方面,螺线却有一个始点,而且围着它不断地绕下去,其长度是无限的.它是一条开放性的曲线,始点与终点不连接在一起.螺线上的点也不像圆那样与它的极点(始点)等距离.

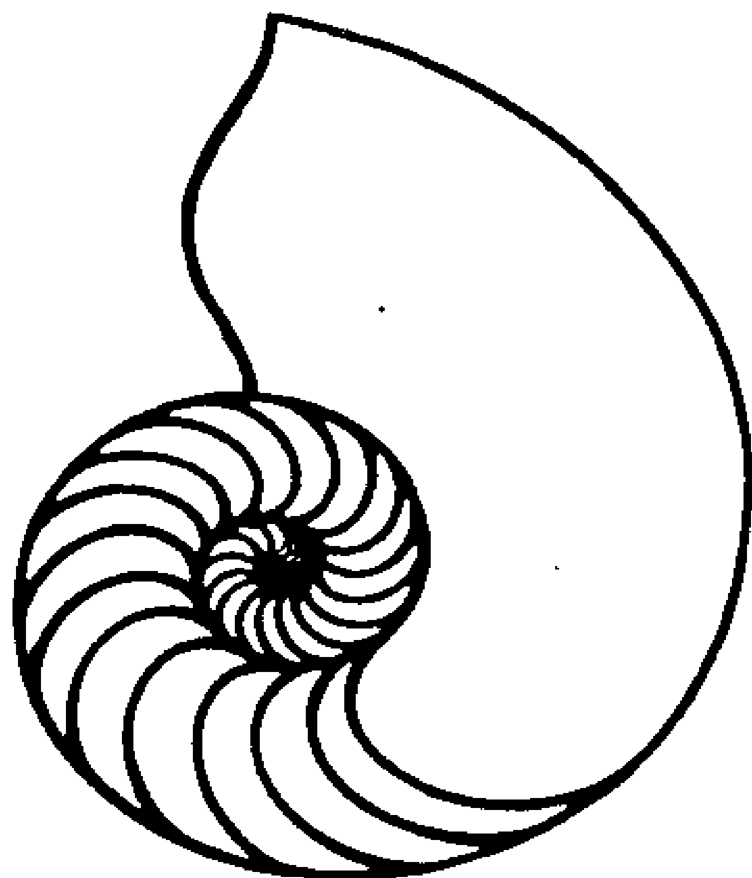
螺线有二维和三维之分.右图是一个平面二维螺线的优秀例子.它不是由分离的同心圆形成的,而是由单纯的沟槽构成的.当螺线围着像圆柱或圆锥那样的物体缠绕时便形成了空间的三维螺线,就像 DNA 分子、螺丝钉或螺丝锥那样.三维螺线我们又称螺旋.

螺线是一种令人兴奋的曲线,无论是从数学上加以研究,还是在自然现象的生成中和其他领域中发现它的踪影及其联系.这些领域包括:有蔓植物、贝壳、旋风、飓风、骨的构造、旋涡、银河系、蜘蛛网、建筑和艺术图案等.

# 不寻常的等角螺线

等角螺线是一种迷人的曲线，它出现在以下的自然界的生长形式中：鹦鹉螺的壳、向日葵的种子盘、球蜘蛛的网等等。公元 1638 年，笛卡儿(Reré Descartes，1596—1650)首先研究了等角螺线。17 世纪后半叶，雅可比·贝努利发现了许多有关它的性质，事实上他对等角螺线情有独钟，临终前特地嘱咐，要求将一正一反的两条等角螺线刻在他的墓碑上，并附以简洁而又含义双关的颂词：

"我虽然变了，但却和原来一样！"



一个有小室的鹦鹉螺.

**等角螺线的一些性质:**

1) 螺线的切线与半径所成的角全等——因此采用术语"等角".

2) $r = ae^{b\cot\theta}$——等角螺线的极坐标方程.

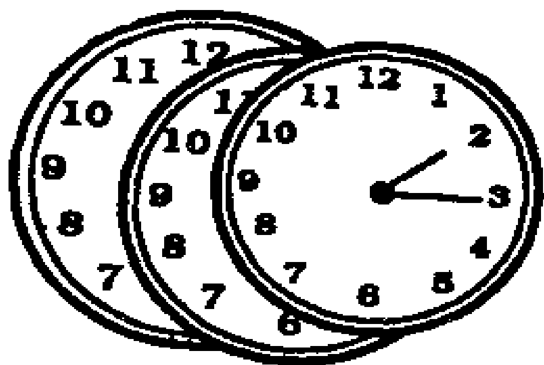
3) 等角螺线按几何比率增长,因此任意的半径被螺线所截的线段构成等比级数.

4) 当等角螺线旋转时,它的大小变了,但它的形状却保持不变.

[147]

## 检验爱因斯坦的广义相对论

爱因斯坦理论的许多部分都已获得了证明，但他的广义相对论却依然停留在理论上．在爱因斯坦相对论中，光速不变是一个精髓部分．



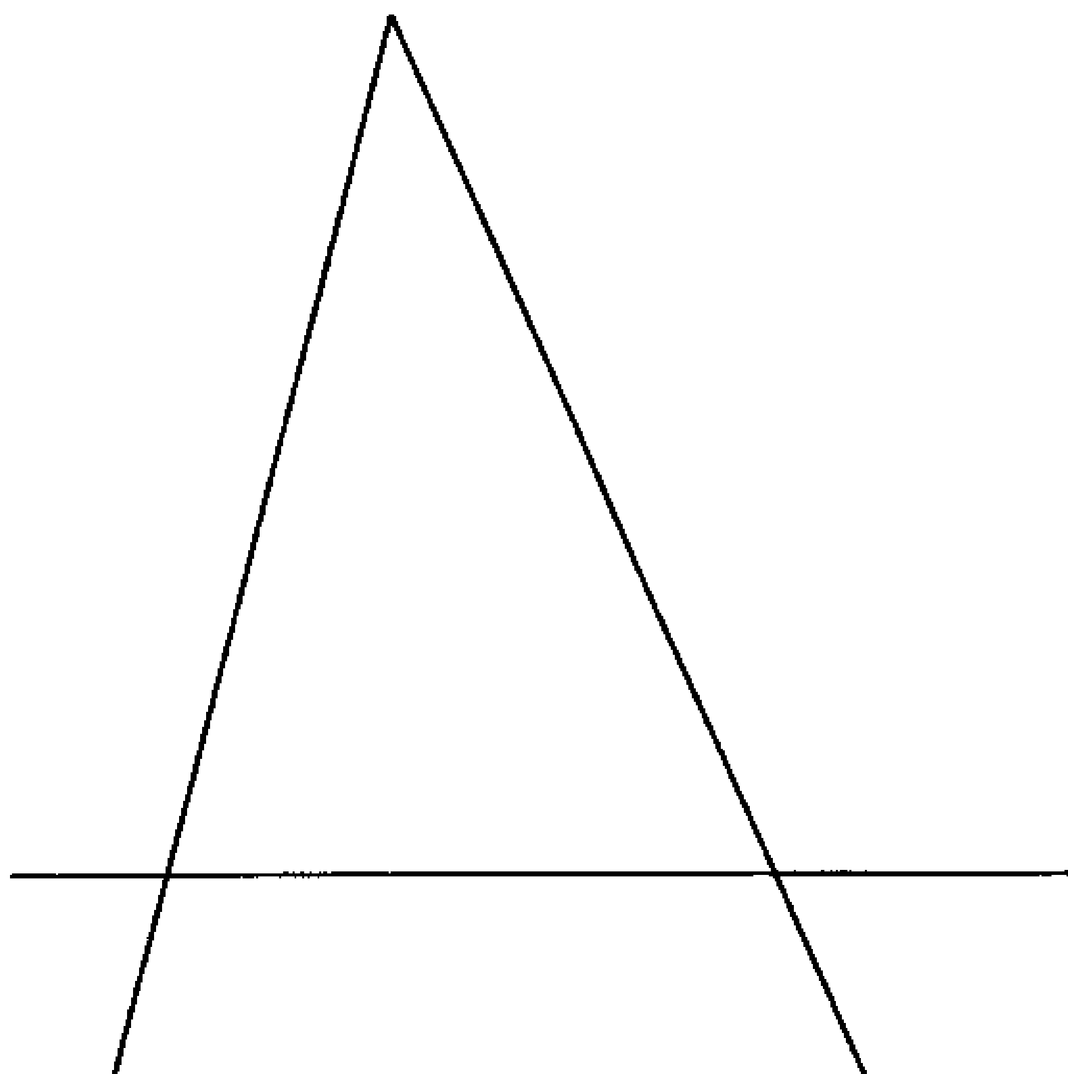

光速 $c=186\ 000$ 英里／秒．假设你以一半的光速作星际旅行，而且接近一个光源（一颗星）．这个星发出的光其速度永远是186 000英里／秒，它是不依赖于你的速度的．能够解释这种现象的唯一的理论方法是由于空间的构造使得宇宙飞船里的钟跑慢了．但在你的飞船上没有什么东西能指示这一点．留意你的控制台，你会发现在空间飞船上的每件东西（有生命或无生命）在度量上变慢或缩短了．

事实上空间和时间的度量是依赖于速度的，速度的增加会使时间慢下来，而且距离（长度或大小）也增加了．1972年美国的两位科学家将一架原子钟放在一个喷气设备上绕地球飞行．在它们旅行的最后，显示出该钟与地球上的同步的钟相比每秒慢了十亿分之89．由线性加速器所进行的其他的检验，证实了爱因斯坦相对论中的 $E=mc^2$．不要多久，爱因斯坦广义相对论也将得到检验．斯坦福大学的科学家们[①]与美国国家航空及太空总署联合，计划了一次航天飞机的空间发射．航天飞机将携带一台专门的旋转仪，它能够检验爱因斯坦提出的质量使时空产

① 原注：在斯坦福大学，科学家们在这方面所进行的实验工作超过了30年．

生弯曲的理论.而正是这种时空的弯曲支配了所有星体(恒星和行星,大的和小的)的运动.人们相信,检验的结果将会在科学界[148]造成一场轰动!

# 产生三角形谜题



在上图中加两条线使之产生 10 个三角形.

（解答见附录）

[149]

## 费尔马大定理——已证还是未证?

新近解决的一个著名的数学问题即费尔马大定理.费尔马(Pierre de Fermat, 1601—1665)是一位职业律师,他乐于把自己的空余时间都放在数学的研究上.他在一本书的眉页的地方写了下面一段话——

> 将一个正整数的立方表为两个正整数的立方和;将一个正整数的四次方幂表为两个正整数的四次方幂的和;或者一般地,将一个正整数高于二次的幂表为两个正整数同次幂的和,这是不可能的.对此,我确信已经找到了令人惊异的证明,但书页的边幅太窄了,无法把它写下.

**重新陈述**:如果 $n$ 是大于 2 的自然数,则没有正整数 $a,b,c$ 会满足 $a^n+b^n=c^n$.

如果 $n>2$,不存在正整数 $a,b$ 和 $c$,使得

$$a^n+b^n=c^n$$

自然,这个批注是在他死后发现的,而它却向数学家们提出了挑战.几个世纪来,已证或是未证的问题就连最杰出的数学家都拿不准.而对于证明费尔马大定理的努力所获得的结果,变得比定理本身意义更加深远.有人认为费尔马本人根本没有对定理加以证明,他这样做只是为了使他的同事难堪.虽然如此,350年来它激发了许多重要的数学思想和发现.最近,普林斯顿大学的A·J·怀尔士教授发表了一份长达200页的论文《模椭圆曲线和费尔马大定理》令数学界振奋不已.怀尔士在剑桥的最近一次讲演中宣称他证明了谷山-志村-韦尔猜想(1993年6月),而数学家们普遍感到这是证明费尔马大定理的关键.目前,数学界对此普遍予以肯定,看来怀尔士的工作将使费尔马大定理画上句号.

[150]

## 莫比乌斯带、π 与星际旅行

数学为科普作家的写作提供了丰富的思想，诸如第四维、莫比乌斯带、超空间、克莱因瓶、π 等等都是写作的题材．莫比乌斯带的概念是由德国数学家莫比乌斯（Augustus Möbius，1790—1868）首先创造的．在《星际旅行——下一代》一书的“时间方块”一节里，莫比乌斯带起了关键的作用．在那里莫比乌斯带被用于时间上．“事业号”飞船进入了一个特殊的时间带，这个时间带的形状就像莫比乌斯传送带一样，使他们陷入一个无尽的同样顺序事件的重复，直至船长发现了一种解答为止．

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164O6...

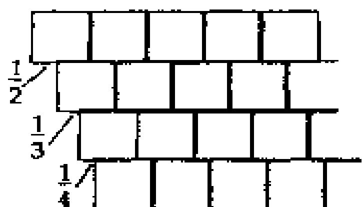
在《星际旅行》的另一个情节里，数学是英雄，这里 π 被用于击败魔鬼计算机．当斯波克问计算机 π 的数值时，由于 π 是无限不循环的小数，迫使计算机全神贯注地进行计算，终于为船员们赢得了宝贵的修复飞船的时间……

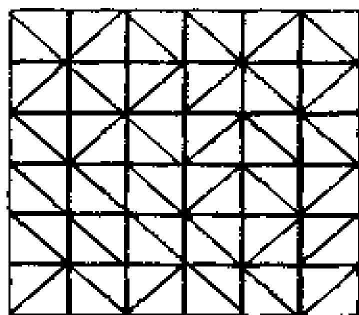
我们热切地希望，其他的作家也能在他们的创作中更多地运用数学思想！

［151］

## 朋罗斯瓷砖

像铺瓷砖那样的现象，在龟壳盘、鱼鳞，甚至人的皮肤细胞上是很明显的，它们看起来就像是镶嵌一样．几个世纪来，艺术家们就是用这样的镶嵌来装修地板、图画和墙壁．穆斯林艺术家们是镶嵌几何图案的能手．M·C·埃舍尔发展了前人关于镶嵌的工作并使之富有生气，使人看起来显得像鸟、像人、像鱼、像动物那样处于运动状态．上面提到的镶嵌形式都称为匀称周期铺镶．在周期铺镶中，一种基本的图案在人们眼睛往垂直或水平方向移动时，会出现规则的重复．



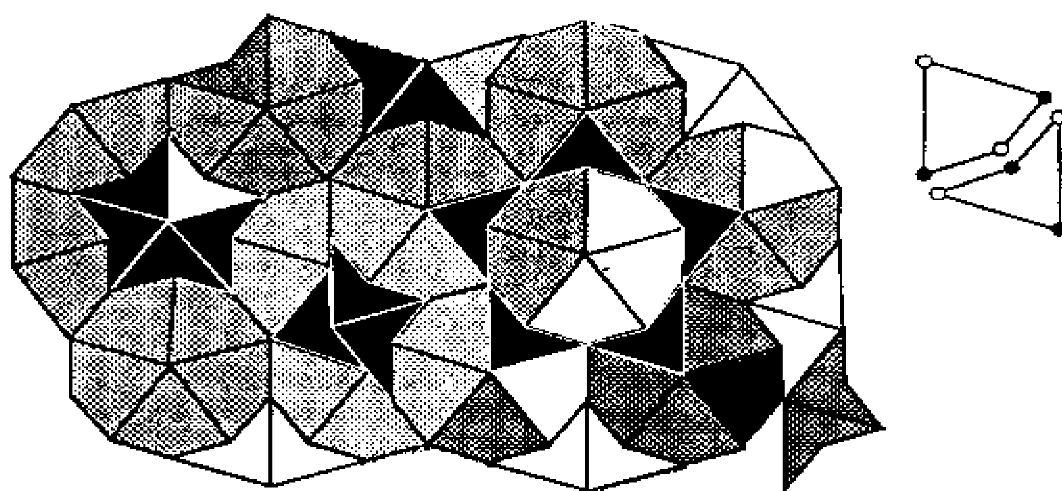
左图是一个非周期性铺镶，它是用方形瓷砖铺成一排排，像台阶一样，右图是用直角三角形做的非周期铺镶的例子．

数学家们相信，如果一种非周期铺镶能够用特殊形状做出的话，那么一种周期的铺镶也能用同样的形状做出①．然而，1964年，人们却发现了一套只能用于非周期镶嵌的瓷砖．这套瓷砖含有20000种不同的形状．由于上述的发现，另一些人便开始追求更少的瓷砖数量．1974年，一位英国数学物理学家R·朋罗斯②发现了一套能产生无数不同的平面非周期镶嵌的瓷砖．

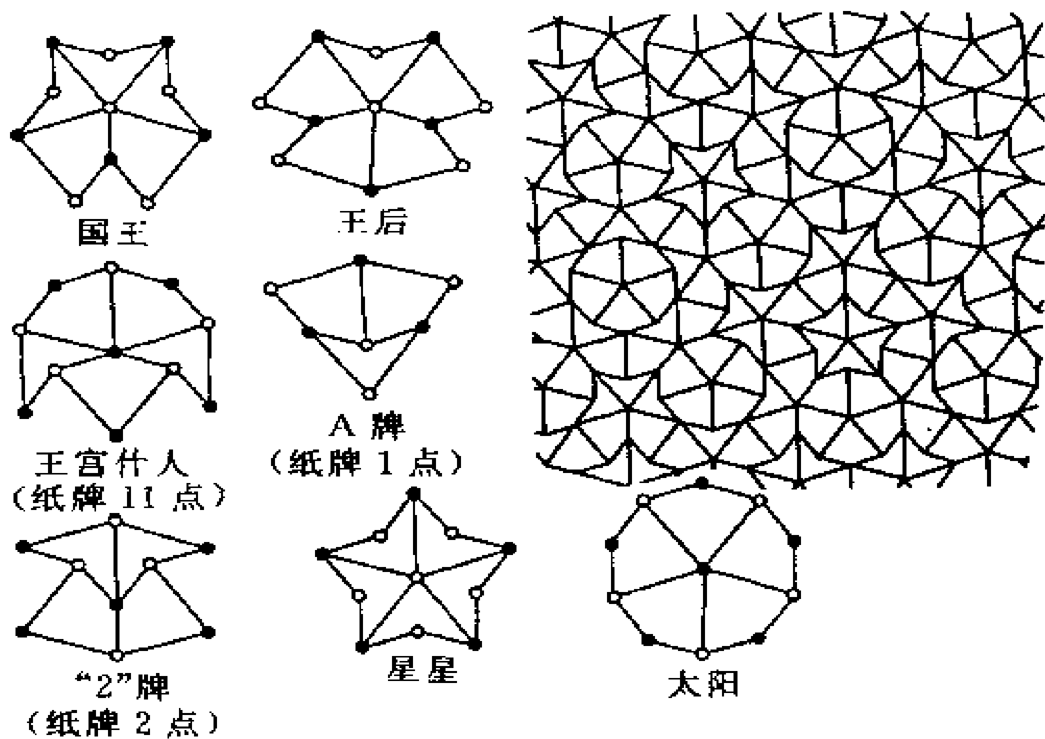
① 原注：用台阶方块和直角三角形作出的非周期镶嵌的例子，可以通过整理成为周期镶嵌．

② 原注：为M·C·埃舍尔等艺术家所用的"不可能的三接棍"是朋罗斯创造的．他还对磁扭线的理论作了解答．虽然磁扭线是不可见的，但他相信空间和时间通过磁扭线的相互影响而交织在一起．

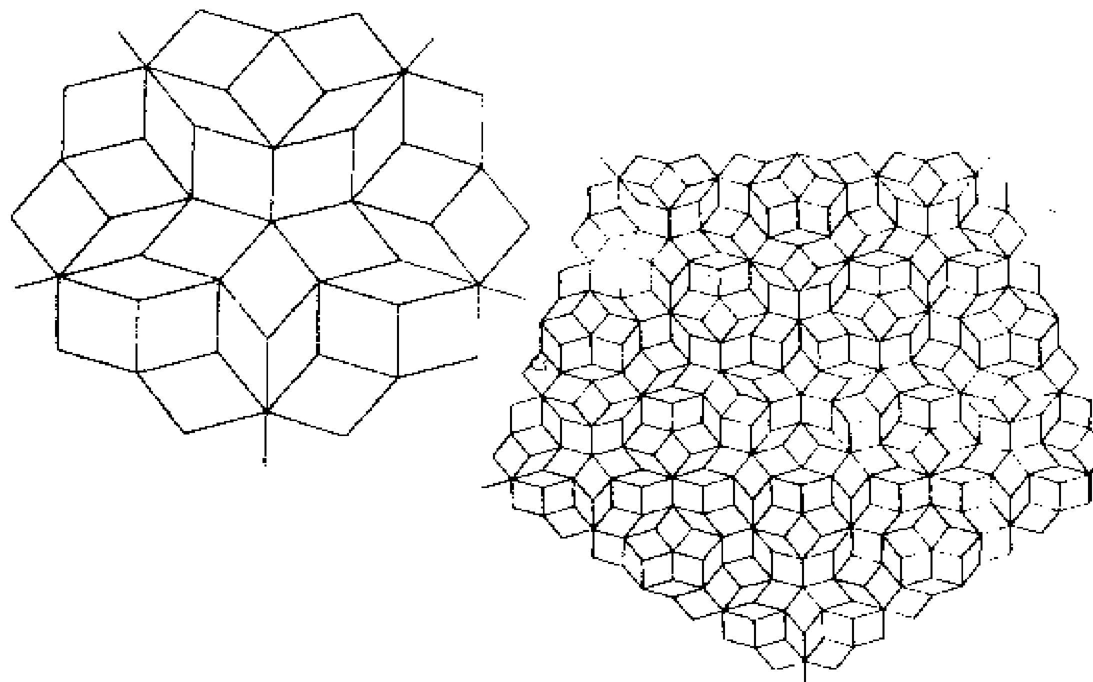
这套瓷砖只有两块,他把它们命名为“标枪”和“风筝”.这些瓷砖 [152] 形状如下图,是由菱形①、黄金均值、黄金三角形等要素构成.



“标枪”和“风筝”必须在顶点的地方接合在一起,如图所示




[153]



印在一张透明纸上,并旋转$\frac{1}{5}$圈,会跟原有的图案相合.

通常的情况是,数学概念难以激起数学范围以外人的兴趣.

但朋罗斯的发现却是一个例外. 1982 年,一项实际应用的发现使得非数学界对此注目. 化学家 D·施特曼发现了一种锰和铝结合的方式,这种结合得到一种超强度的合金. 但他发现该合金的晶体结构不服从现有的巴娄定律[1]. 这种晶体具有五折对称. [154]

起初科学家们并不认真看待施特曼的结果,因为他们总感到晶体是不可能有五折对称的. 在这种新合金出现之前人们认为,将晶体绕轴旋转$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$,$\frac{1}{6}$圈能够产生完全相同的图案,但旋转$\frac{1}{5}$圈则不可能[2]. 但当科学家们开始把它与朋罗斯二维瓷砖联系起来时,他们的想法产生了变化. 不仅如此,科学家们还利用朋罗斯的想法创造出了三维的镶嵌模型,以描述特定晶体的构造.

朋罗斯瓷砖激发了众多的思路、令人迷惑的数学联系和"新的世界". 这两种简单的形状,成了创造无数不同镶嵌的基础. 至于发现"标枪"和"风筝"更多的性质和其他的组合方式,则须通过创作你自己的"朋罗斯镶嵌"来实现.

数学家们还发现了许多其他的瓷砖组合,它可用于创造非周期铺镶. 但一个未能回答的问题依然保留着,亦即是否存在单一形状的瓷砖,它只能用于平面的非周期镶嵌? [155]

---

① 原注:巴娄定律(一个数学定理)的陈述是:五折对称对于平面和空间的镶嵌是不可行的. 科学家们在他们的工作中运用这个定理,从而不考虑晶体非周期镶嵌的可能性.

② 原注:表面上这种争议类似于为什么全等的正五边形不可能镶嵌一个平面.

## 数的位置值系统——来自何方?

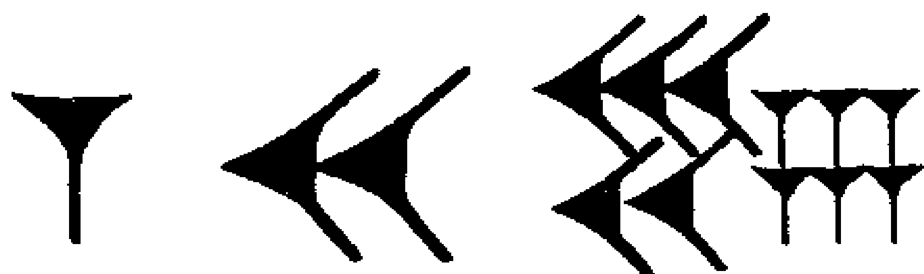
今天我们把位置值的概念视为当然.我们教孩子写数是十进制的,它似乎成了我们的第二个当然,一种当然的写法.一个令人惊奇的事实是,人们从最初用记号或棍子表示数量,到古巴比伦人产生位置值概念(约公元前 2000 年至公元前 1000 年),前后经历了二万八千年.而同样令人惊奇的是,最初的位置值系统并非十进制的,而是六十进制.在漫漫的二万八千年间,各种不同的文化发展了各种不同的数和量的符号,但没有表示位置值的系统,为了表达多的数量只能不断地重复符号.例如,埃及人最早的数是采用象形符号并基于重复的原则.象形符号有如:𓏺 =1,𓎆 =10,𓍢 =100,𓆼=1000 等等,要写一个量则需要重复他们的符号.如古埃及人用象形符号写 34,必须写为𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺.

已知最为古老的位置值系统是古巴比伦的苏米尔人(生活于古代幼发拉底河下游地区的一个部落——译者)的六十进位制.但他们只用两个符号:1 = 𒁹 和 10 = 𒌋 以替代从 0 到 59 的六十个符号.这一系统最主要的困难之一是它起初就缺少零(试想我们现代数的系统若没有零的符号,那么 202 跟 22,2002,220 等等不就混起来了吗?)如果一个数是作为一个位置的持有者,那么它的值要由所写的上下文来确定.后来作了一种改进,[156] 把留着的空位也当作一个位置的持有者.但这样依然无法解决数的末尾是零的问题,它们的值还得依赖于所写的上下文.

在公元前 4 世纪到公元前 1 世纪间,古巴比伦人有时采用 𒑊 或 𒑊 作为零位置持有者的符号.由于这个零的发明,使巴比伦人能够写出分数的表示式.一个数以零的符号开始则表明它是一个分数.例如:

$$𒑊𒌋𒐊𒌋𒌋 = 0°15'20''\left(=0+\frac{15}{60}+\frac{20}{3600}\right).$$

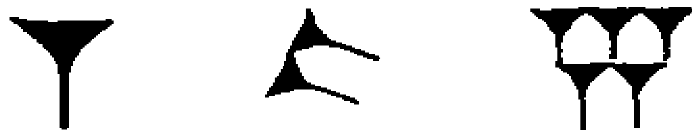
但表示“什么都没有”(即零的量数)则不直接用零的符号或与零的符号相联系.



第三位　第二位　第一位

$1\times60^2$　$20\times60^1$　$56\times60^0$

$3600+1200+56=4856$



第三位　第二位　第一位

$1\times60^2$　$0\times60^1$　$5\times60^0$

$3600+0+5=3605$

在公元前第二个一千年的前半部期间,古巴比伦学者发展了第一个真正的位置值的数的系统.

上述概念随着时日的流逝而逐渐演化,起初是希腊人,后来是阿拉伯和犹太的天文学家采用了巴比伦人的记数法,并把位置上的楔形数改成他们字母表上的字母,且用于天文表上.公元500年左右,印度人发明了一种十进制的记数法.在记数法中,对所用的符号加以标准化,超过9的字母不用,而由位置值组成.

今天,我们依然能够找到古巴比伦人所用的六十进位的证据.如用于测量角(度、分、秒)和时间(时、分、秒)的单位就是六十进制的.如果没有进制的发明,人们都用类似于罗马数字系统那样来计算,那么你能想象得到,它会是一项何等惊人和艰巨的

| 第一位 | 60分之一位 | 3600分之一位 | 216000分之一位 |
| --- | --- | --- | --- |
| $0\times60^{0}$ | $2\times60^{-1}$ | $30\times60^{-2}$ | $9\times60^{-3}$ |
| $=0$ | $+\ \frac{2}{60}$ | $+\ \frac{30}{3600}$ | $+\ \frac{9}{216000}$ |

巴比伦的天文学家用第一位由零符号开始的数来表示六十进制的分数.

任务? 又如果没有二进制,计算机将怎样发展或设计程序? 如果位置值的进制不是由逐渐演化而来,而是让一些人去决定的话,那么十进制就未必是人们的最佳选择.例如,18世纪法国的蒲丰伯爵就提出采用十二进制.因为12有4个因子而10只有两个.但著名的数学家J·L·拉格朗日却提倡采用素数进制.因为在每一个这种数的系统下的分数都可以简单表示为唯一. 其

# 你出生在星期几?

我们能够很容易确定一件事发生或将要发生在星期几.

| 月份的数 | |
|---|---|
| 一月 | 1 |
| 二月 | 4 |
| 三月 | 4 |
| 四月 | 0 |
| 五月 | 2 |
| 六月 | 5 |
| 七月 | 0 |
| 八月 | 3 |
| 九月 | 6 |
| 十月 | 1 |
| 十一月 | 4 |
| 十二月 | 6 |

如果是闰年,则一月为0且二月为3.

| 星期几的数 | |
|---|---|
| 星期天是 | 1 |
| 星期一是 | 2 |
| 星期二是 | 3 |
| 星期三是 | 4 |
| 星期四是 | 5 |
| 星期五是 | 6 |
| 星期六是 | 7 |

| 年份的数 | | |
|---|---|---|
| 1752.9.16~1799 | 加 | 4 |
| 1800~1899 | 加 | 2 |
| 1900~1999 | 加 | 0 |
| 2000~2099 | 加 | 6 |
| 2100~2199 | 加 | 4 |

例如:测试1990年8月27日.

**步骤:**

1) 取后两张表,年数1990,我们用90.

2) 将它除以4,如果有余数则不管它.

$$90 \div 4 = 22(\text{余 2 我们不管}).$$

3) 转到月份表上,找出对应于8月的数.它是3.

4) 把月份中的日期数(这里是27)加到从步骤1到步骤3所得的数.我们有:

$$27 + 90 + 22 + 3 = 142.$$

5) 将上面的和除以7.我们得出:

$$142 \div 7 = 20 \cdots\cdots 2.$$

(注意:如果余数为0,则用7做为余数.)

6) 从年份的数表中找出 1990 应加的数(我们看到它是 0).

我们把它加到步骤 5 所得到的余数上:

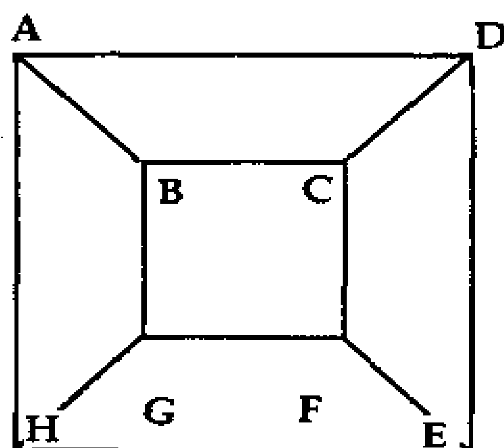
余数 + 年份加数 = 2 + 0 = 2.

这个 2 能告诉我们这一天是星期几.方法是:在"星期几的数"的表上找出这个数,我们看到对应于它的是星期一.

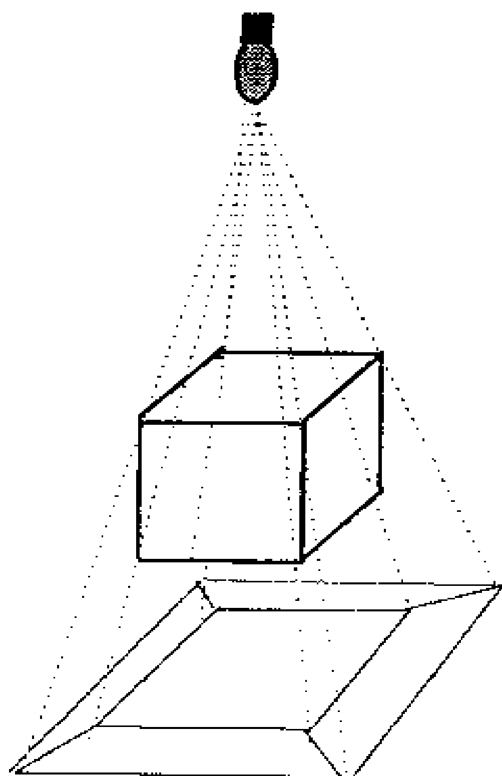
[159] 你出生在星期几? 怎样才能得出它?

平面投影几何研究的是一个平面物体当它投射在另一个平面上时保持不变的性质.例如,当一个平面图形通过一点投射到另一个平面上时,该图形的有些性质得以保留,而另一些则改变了.如线的投影还是线,三角形的投影依旧为三角形,但圆却未必投影为圆.它也可能投影成椭圆,这要依赖于投影点的位置.在一般情况下,距离、全等、角的度量等性质在投影下不保持.

# 一个超立方体的投影




六个正方形是 *ABCD*, *ABGH*, *HGFE*, *CDEF*, *ADEH* 及 *BCFG*.



三维的物体当它投影在一个平面时会显示出一些有趣的性质.左图是一个三维的立方体投影到二维平面上的像.结果立方体的六个面能同时看到.假如现在要你极尽想象力,那么你能拟想出一个四维的超立方体在三维空间中的投影吗?

[160]

## 爱因斯坦的"隐私"

1990 年 2 月,美国科学促进会年会就爱因斯坦是否应当享有他理论的全部荣誉问题展开了热烈讨论. S·T·普罗依茨的书《在爱因斯坦的影子里》及《米列娃·玛里奇的悲剧生活》是引起这场轰动的起因. 1896 年,爱因斯坦与玛里奇在瑞士联邦理工大学就学时相识. 他们于 1903 年结婚,1914 年离异. 作者的论点是:爱因斯坦的工作是一种合作的成果,证据如下:

$$E=mc^2$$

1) 他们选的几乎是同样的课程.

2) 他们写同样领域的结业论文.

3) 俩人在 1900 年的最后一场考试中都失败了,但爱因斯坦被允许毕业.

4) 在 1982 年前瑞士的大学还允许对男人和女人采用不同的标准.

5) 玛里奇如果不是很有才华的话是不可能在一所男性居优势的学校学习而且被允许研究物理的.

6) 据说玛里奇告诉过她父亲,她和爱因斯坦新近结束了一项非常重要的工作,它会使爱因斯坦因而出名. 同年,爱因斯坦发表了他的论文《相对论,布朗运动和光电效应》(为此,爱因斯坦获得了 1921 年的诺贝尔物理学奖).

7) 爱因斯坦把他全部的诺贝尔奖金都给了玛里奇. 她用这些支付和照料他们患有严重精神病的儿子.

8) 更进一步的证据牵涉到爱因斯坦给玛里奇的 41 封信. 信中提到"我们的探索"和"我们的工作". 然而现存的玛里奇给爱因斯坦的信只保留 10 封,而且没有一封提到物理. 爱因斯坦经常就物理和理论向玛里奇表示感谢,而玛里奇现存的信中却没有提到.

9) 玛里奇跟物理学家鲍尔·哈布里奇一起工作,开发了一

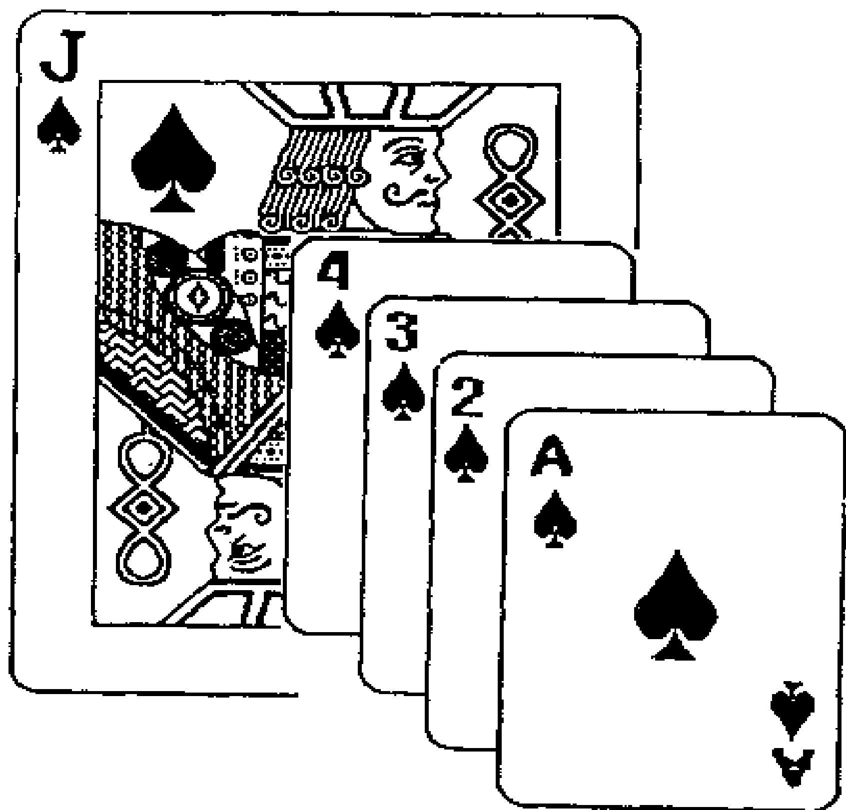
种测量小电流的仪器,而其专利的落名却是爱因斯坦——哈布里奇.

10) 作者指出:那时男人们占有女人的成果并得到荣誉是普遍的事.此外,还可能是双方达成默契,即保持玛里奇贡献的秘密以增加爱因斯坦取得大学职位的机会. [161]

# 数 学 洗 牌 法

用一双熟练的手,一副纸牌便可以表演"魔术".

例如,一副52张牌能够通过8次完全的洗牌而转换它原



有的顺序.所谓完全洗牌是指把一副牌分成两半对插错开.但像斯坦福大学P·底亚逊尼那样的数学魔术师,一副牌在手,通过多次的完全洗牌[①]可以变成某种特定的牌序.有一个公式可以揭示所有的方法.

不幸的是,这种手艺不太容易.经过多年的深思熟虑,藉助于聪明的假定和计算机的威力,公式终于被开发和证明(经由计

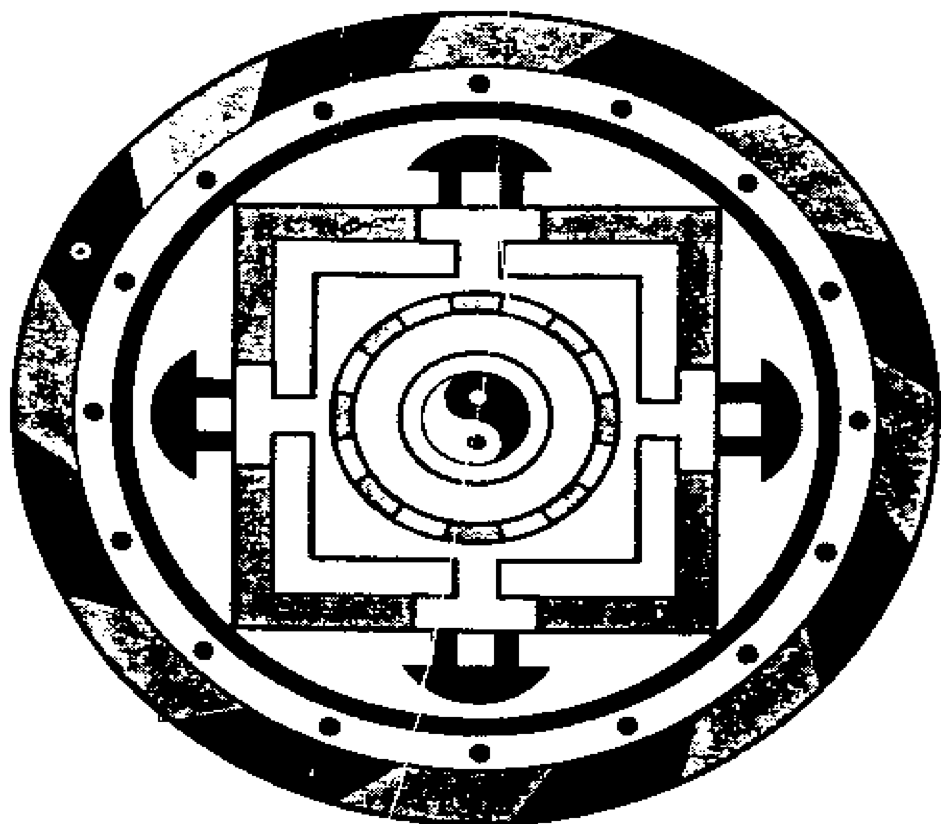
① 原注:有两种完全洗牌的类型——一种是第一张牌保留在上面,另一种是第一张牌变到第二张去.

算机)[1].像多数的数学发现那样,一件东西的出现会引出它与另一件东西间的数学联系——对这种情况,每副牌的可能排列竟然与数学中的群论联系在一起. [162]

① 原注:贝尔实验室的P·底亚逊尼、R·格拉亨和在俄勒冈大学工作的W·康托合作,发现了该顺序公式.

## 数学与迷信

超过一定年纪的人对于数都会有一种特殊的感受.一些人相信,数除了描述一个特定的量之外,还具有运气或其他的力量.许多人都有自己幸运的数,而许多不同文化的人还发现,像13这样的数是不幸的.



该标记是一种古代的宗教符号,其中数4是它的要素——通常是圆内部带一个正方形,分为4个或4倍数个的方位.

毕达哥拉斯的信徒们认为数统治着宇宙.他们把整数看得特别重要,并相信如果你能掌握它们的用法,那么你就将了解并影响宇宙的进程.他们甚至认为数是影响健康、公正、婚姻等等的原因.例如:

——1是所有数的起源.

——偶数是阴性的,而2是第一个偶数,它代表变化多端的见解.

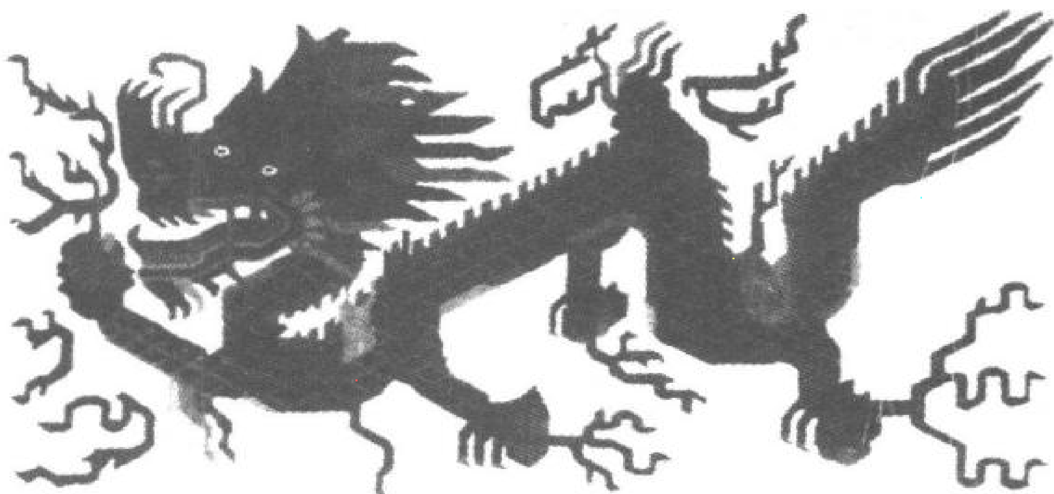
——3是第一个阳性的数,它是1和2构成的,代表单一和多变所构成的调和.

——4是一个完全平方,它代表公正.

——5表示婚姻,它是由第一个阴性的数和第一个阳性的数所构成. [163]

## 数学、分形与龙

分形已被归为自然的几何.虽然自然界里有欧几里得物体的丰富例子(诸如六角形、圆、立方体、四面体、正方形、三角形、……).但许多随意性的自然现象似乎难于由欧几里得的方法产生.对这类情况,分形给出了最好描述.



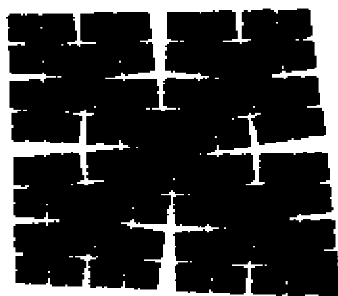
我们知道,欧几里得几何被大量用于描述像晶体、蜂巢之类的物体,但人们很难在欧氏几何中找到表述诸如炒玉米花、烘烤物品、树皮、云朵、姜根和海岸线等对象的方法.

欧几里得几何发祥于古代的希腊(约于公元前 300 年,欧几里得写下了《几何原本》),而分形出现的时间则要迟至 19 世纪.事实上,分形这个术语在 1975 年 B·曼德勃罗之前还没有被造出来.

分形有两种类型,一是几何分形,二是随机分形.分形的性[164] 质是多样的.例如,在平面上分形的维数是在 1 与 2 之间的分数,而在空间里分形维数在 2 与 3 之间.在分形的世界里,我们不能把它说成是 2 维或 3 维的,而应说它是 1.75 维或 2.3 维等等.在分形几何里海岸线的长度被认为是无限的,因为每个小小的海湾和沙滩都被测量,而这样的海湾和沙滩的数量在不断地

变化，就像在龙的曲线构造里那样.

分形有许多形式和用途.一组分形具有以下性质：即它的精细部分不会损失，放大后具有与原先相同的结构.下图所示的例子是塞沙洛曲线.



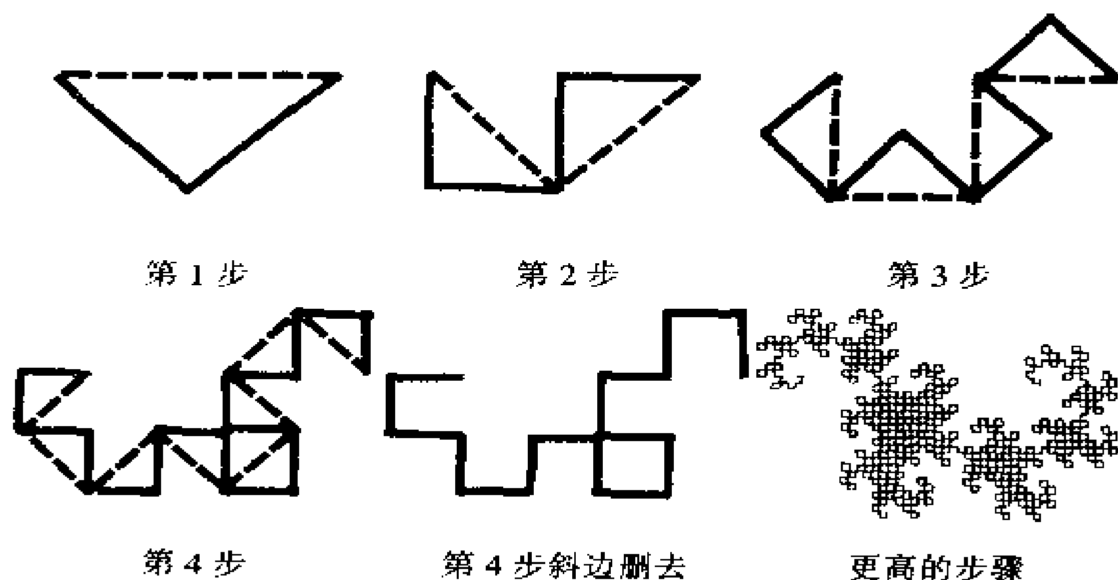
塞沙洛曲线

分形的新应用不断被发现.由于分形能够用递推函数加以描述（斐波那契序列就是一个递推的例子，它的每个项都等于前两项的和），所以用计算机生成分形是理想的.像电影《星际旅行Ⅱ：可汗的愤怒》中新行星的诞生以及《杰地的返回》中行星在空间飘浮等壮观的场面，就是由彼克沙公司在一台计算机上完成的（1986年）.分形还能用于描述和预示不同生态系统的演化（如乔治亚州奥克芬诺基沼泽地的生态变化①）.事实上，生态系统用分形来处理已成为当前的一种主要手段，它对于确定酸雨的扩散和研究其他环境污染问题也有重要的作用.

分形打开了一个完全崭新和令人兴奋的几何学大门.这一新的数学领域，触及到我们生活的方方面面，诸如自然现象的描述，电影摄影术、天文学、经济学、气象学、生态学等等.分形能够 [165] 产生具有出人意料的古怪物体.它的应用是如此广泛，它的特性是如此迷人.这个我们拥有的新几何，甚至可以描述变化的宇宙！

龙的曲线是由物理学家J·E·亥威最先发现的，它可以通过若干步骤形成.这里所用的方法与生成雪花曲线一样.在雪花曲

① 原注：H·哈斯汀是纽约霍弗斯塔大学的一名数学家.他用分形作为奥克芬诺基沼泽地的生态系统的动态模型.将植物及丝柏斑块的地图与随机分形的地图相比较.结果，无需广泛的历史资料便能得出，在物种竞争中怎样的种类能够残留下来.




用直角等腰三角形构造龙的曲线、虚线指删去的斜边.

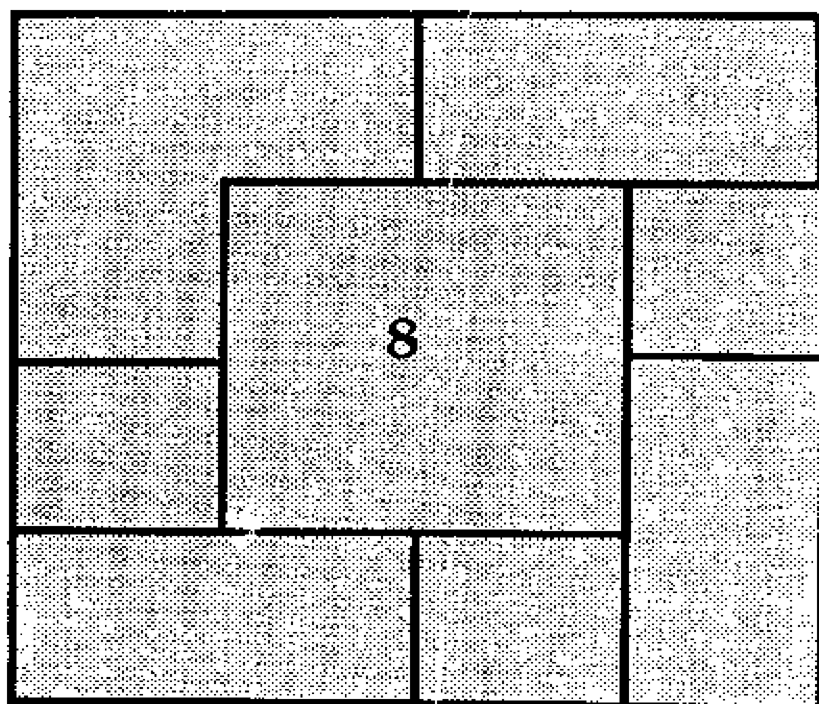
线中,我们从一个等边三角形开始,然后在它三分边的中段加上一个较小的等边三角形,并持续同样的过程.而龙的曲线是由一个等腰直角三角形开始的,以该等腰直角三角形的直角边为斜边作另外的等腰直角三角形,再以这些新等腰直角三角形的直角边为斜边作另一些等腰直角三角形,如此等等.并将所有的斜边删除掉,如上图所示.

现在,你可以尝试创造你自己的分形.从一些其他类型的几何对象开始,并设计一种类似的程序.

[166]

## 重叠正方形问题

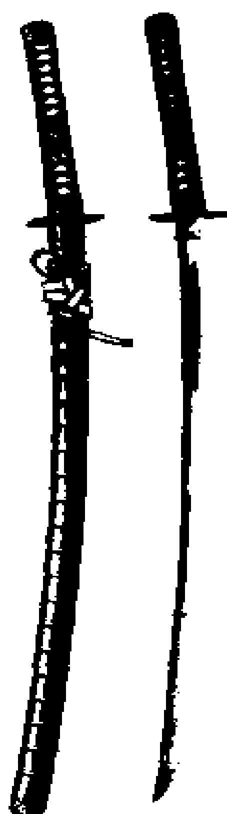
八个全等的正方形一个放在另一个的上边.如果数字8的正方形是最后放的,试确定其他7个正方形安放的顺序,使得最终结果看上去像图上那样排列.




(解答见附录)

[167]

## 日本刀剑中的指数方幂

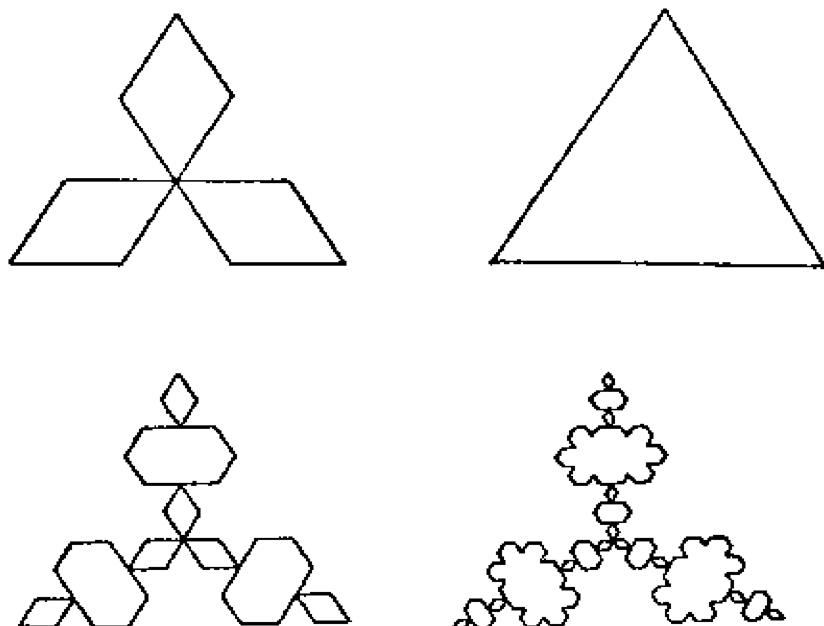


在日本,刀剑的制造是一门艺术,又是一种古老而令人崇敬的职业.它是通过父亲传给儿子,师傅传给徒弟这种秘密的方法承继下去的.在制造刀剑时,工匠们要遵循一种特殊的宗教仪轨并穿着一种仪式的服装.

首先,他们特别小心和巧妙地将钢条焊到铁杆上去,后者是作为手柄用的.其他的钢条摆放在它的上面再焊上一溜长6~8英寸宽1.25~2英寸的条子.由于刀剑应当有柔有刚,所以它必须具有一层层的结构.制造时钢条的温度先要提高到焊合的热点,接着折叠、焊合,然后锻打成原先的大小.要避免与油脂类接触以及可能的裂缝.在这期间自然要小心,绝不能让金属部分碰到手.上述的折叠、焊合、锻打的过程要重复做上多次.实际上它重复进行了22次,产生了$2^{22}=4194302$层的钢.在每次锻打钢条时要交错放入油和水中冷却,而后抽出用铁锤打成所希望的长度和形状.[168]

# 反雪花曲线

让我们看看在雪花曲线形成的过程中，将加上去的等边三角形转换一个方向时会出现什么情形①.



生成一条雪花曲线是从一个等边三角形开始的.把三角形的每条边等分成三段并在中间的一段向外作小的等边三角形，但删去新三角形位于旧三角形边上的底.继续这个程序，对每个等边三角形的边再等分成三段，并在中段向外作更小的等边三角形，如此等等.雪花曲线就是在不断重复这样的过程中产生的.

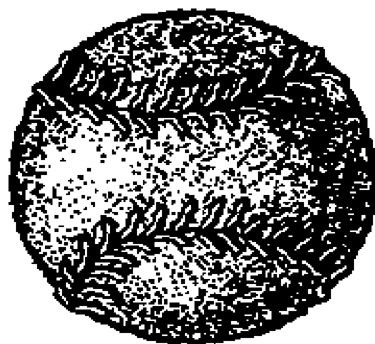
如果我们画的小等边三角形不是向外而是向内，这样所生成的曲线称为反雪花曲线.

① 原注：雪花曲线是一种几何分形，最早是1904年科赫在研究具有无限周长和有限面积的曲线时采用的.所以它也称科赫曲线.

像雪花曲线那样,反雪花曲线有无限的周长和有限的面积.这个事实允许人们能够将它画在一张纸上而不致跑到纸外空间去.[169]

# 混合数学与棒球——高技巧棒球

1845年纽约先驱报刊登了第一份棒球统计资料.这份早期的报告测定了每个选手得分和出局的总数.这一早期的分析是今天棒球资料计算机统计的先驱.我们会发现,今天这类资料包含了一系列的信息,从跑垒、保送上垒、犯规动作以及牺牲打以使跑垒者进垒等等.



有许多变化的东西需要考虑.例如,如果跑垒是用来作为统计的基础,那么全垒打(指打出一球后可安全跑一圈回到本垒——译者)怎样与盗本垒相区别呢?而到达垒上的选手又如何呢?对于安打垒,怎样使单垒打区别于三垒打?怎样利用投球、接球和掷还球的信息?一个选手盗垒的能力与他用棒击球的能力相比又怎么样呢?计算机和线性规划能够带来许多有价值的因素.在统计分析中所引起的问题,你有什么高见呢?塞伯美特利克[①]等人研究了全部有效出击的资料,并对信息作了最佳分析.事实上,在J·索恩和P·帕尔麦的《棒球游戏的秘密》一书中我们找到了一公式,该公式分析了在跑垒中的犯规动作,得出:

跑垒 = 0.46(单垒打) + 0.8(双垒打) + 1.02(三垒打)
+ 1.4(全垒打) + 0.33(保送上垒 + 由投手击中)
+ 0.3(盗垒) − 0.6(捕住盗垒) − 0.25(打击手击中)
− 0.5(垒上出局).

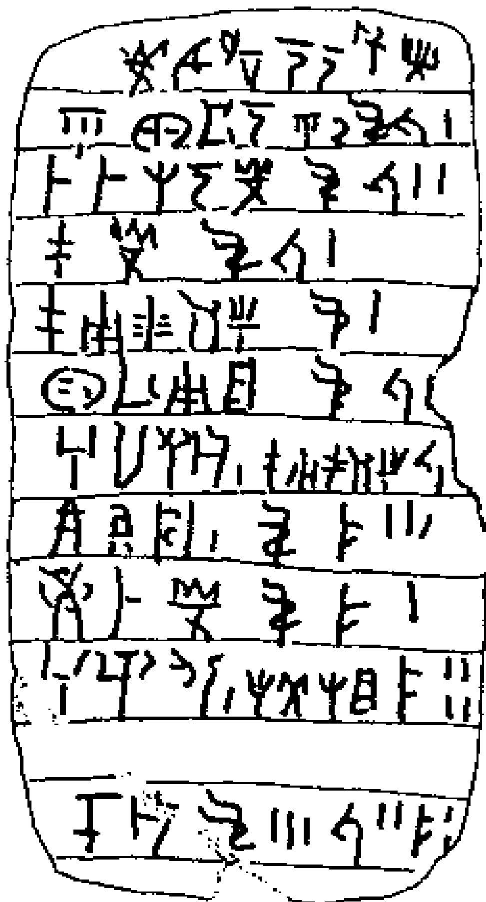
自然,上述资料在游戏中对所有的选手都有效,而且能很快

① 原注:塞伯美特利克代表美国棒球研究会(1971年建立)发起了对棒球历史及统计资料的研究.

地进行计算.只要在场边有一台计算机就行.不过这样一来岂不
[170] 变得很不自然了吗? 还是让我们玩球吧!

# 克利特岛人的数

公元前2200年至公元前1400年的克利特岛上的文明是欧洲最早的文化之一.早期克利特岛的人用象形文字书写文件,其中称为“线状A”的书写形式至今仍未破译,而称为“线状B”的书写形式则得以进化.“线状B”更多的是采用图式符号而非象形字,它在二战后为温吹斯特所破译.在考古发掘中,从粘土板、花瓶上的条纹,宗教上的匾牌,图章、标记和铸铜件等上面的刻字,都出现“线状A”和“线状B”的例子.粘土板上引人注目的是上面的记帐系统,迈诺斯人(早期的克利特岛人)用它作清单,而粘土板大概是一种帐目或作为资料贮存用的.上面的数是十进制的,但他们写一个数更多采用符号的重复而不用位置值.



一块从诺索斯发掘出的粘土板.

他们用

| 或)代表 1

• 或○代表 10

/或 \ 代表 100 而在“线状A”中◈ 被用来代表 1000.

写 160 为 OO OO OO /

此外,考古挖掘揭示,粘土板上的书写有两种方向:一种是从右向左,另一种是从左向右.

# 艾达与计算机程序设计

分析机无论起源于什么都是朴实无华的.它能做各种各样的事情,只要我们知道怎样命令它去执行.它能从事分析但却无力预测任何分析的变化或真理.它的职责就是在我们已经熟悉的范围内有效地帮助我们.

——艾达·B·洛弗拉斯

下面图表中所列的是这些年来人们设计出的计算机语言,这些语言像外语一样多.当由一种特殊语言设计的程序不适合人们的需要时,就必须加以变更,这样一种新的计算机语言就诞生了.但所有这些又是何时、何地及怎样起始的呢?

这项历史始于C·巴贝格(Charles Babbage,1792—1871)设计的差分和分析机——第一台计算机.这种计算机能按设计的程序计算、输入、并遵循程序的指令.不幸的是,那时的技术不足以支持和承担他的计算机.

虽然艾达·B·洛弗拉斯的名字在数学史的书上不常见到,但她还是作为最早的计算机程序员之一而载入史册.艾达生于1821年,是奥古斯特·庇隆和英国诗人洛德·庇隆的女儿.她对数学总是充满着强烈的兴趣和热情.在她生活的那个年代,女人经常被阻挡于科学研究之外,但她幸运地有M·桑麦维里作为[172]她家庭的朋友,后者是狄·摩根的学生,这使她有机会向他请教数学.在19岁时,艾达跟L·金(后来成为洛弗拉斯伯爵)结婚,并生育了两个儿子和一个女儿.她丈夫非常支持她对数学的爱好,而她也有幸地得到了她的丈夫、母亲和照料她孩子的仆人的帮助.这一事实使她能腾出时间倾注于数学.但她是怎样卷入计算机程序设计的呢?

在10岁时,艾达·洛弗拉斯第一次遇到C·巴贝格.那时她

ADA • BASIC ◦ FACT • CORAL ◦ LOT •
SIMSCRIPT • COMIT • ADAM •
FORTRAN ◦ AESOP • COGENT
AIMACO • ALTRAN • JOVIAL ◦ DPS ◦
SNOBOL • META • DIAMAG • DYSAC
FLOW-MATIC • DYNAMO • FLAP ◦
SMALLTALK ◦ COBOL • LISP • PAL
BUGSYS • AMTRAN • GPSS ◦ DAS
MAD • COURSEWRITER • ALGY • IT
FORTH • FORMAC • STRESS • ALGOL
PASCAL ◦ C • PRINT • LOLITA ◦
MAP • LOTIS • TMP ◦ BASEBALL • GPL
PILOT ◦ LOGO • PL/1 ◦ DIMATE •

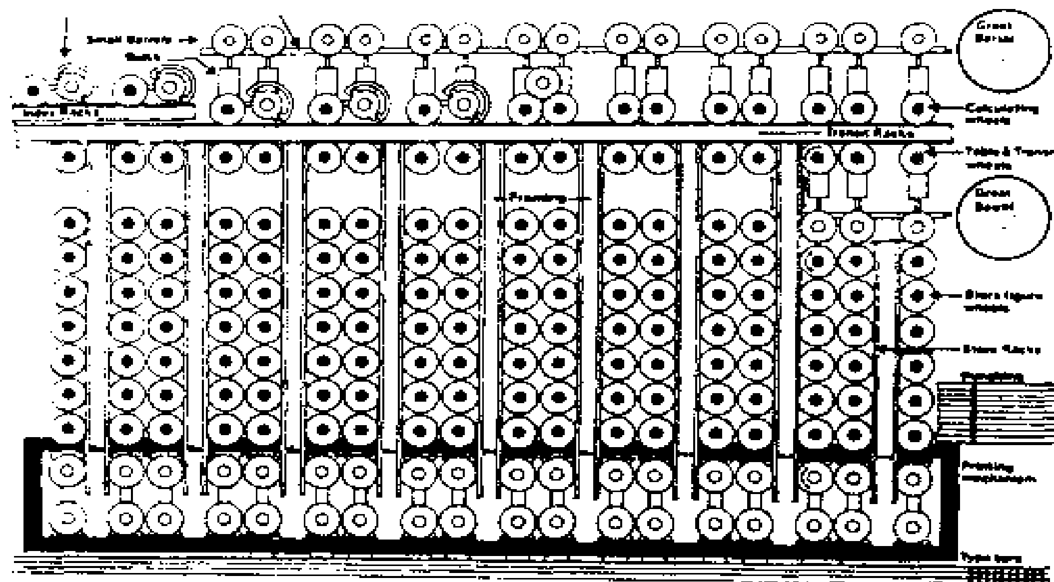
*A collage of some of the names of computer languages that have been developed over the years.*

上面是若干年来开发的一些计算机语言名称的汇集.

跟着一群成年人去参观巴贝格的实验室,后者那令人惊奇的机器已成为伦敦社会的一种吸引力.艾达使巴贝格留下了深刻的印象,因为她是参观者中少数几个能对他的机器和他的工作提出有理智和思想深度的问题的人之一.在21岁时她写信给巴贝格,请求他作为导师.一年后她承担了一篇用法文写的论文《论巴贝格分析机》的翻译任务.她的工作不单是翻译,而且还包括长达论文三倍的注解.她对机器作了详尽的数学解析,描述了它的部件,开列了其可能的用途.实际上,艾达描述了一台尚未存在的计算机.在注解中她甚至为这台虚有的机器写下了用它计算贝努利数的计算机程序.当政府撤消对分析机研究的支持时,财政变得拮据起来,这使对机器的新的研究工作实际上陷于停 [173]

止.尽管巴贝格还继续在较小的样机上工作.其间,不知什么原因(莫非她想得到更多的钱以保持计算机的设计能得以继续?)艾达不幸成为无节制的赛马赌徒,并为此输掉了大量的钱.加上她的悲剧——不幸患了癌症,终于英年早逝,时仅36岁.

巴贝格的设计在某种程度上是现代计算机的先声.为了



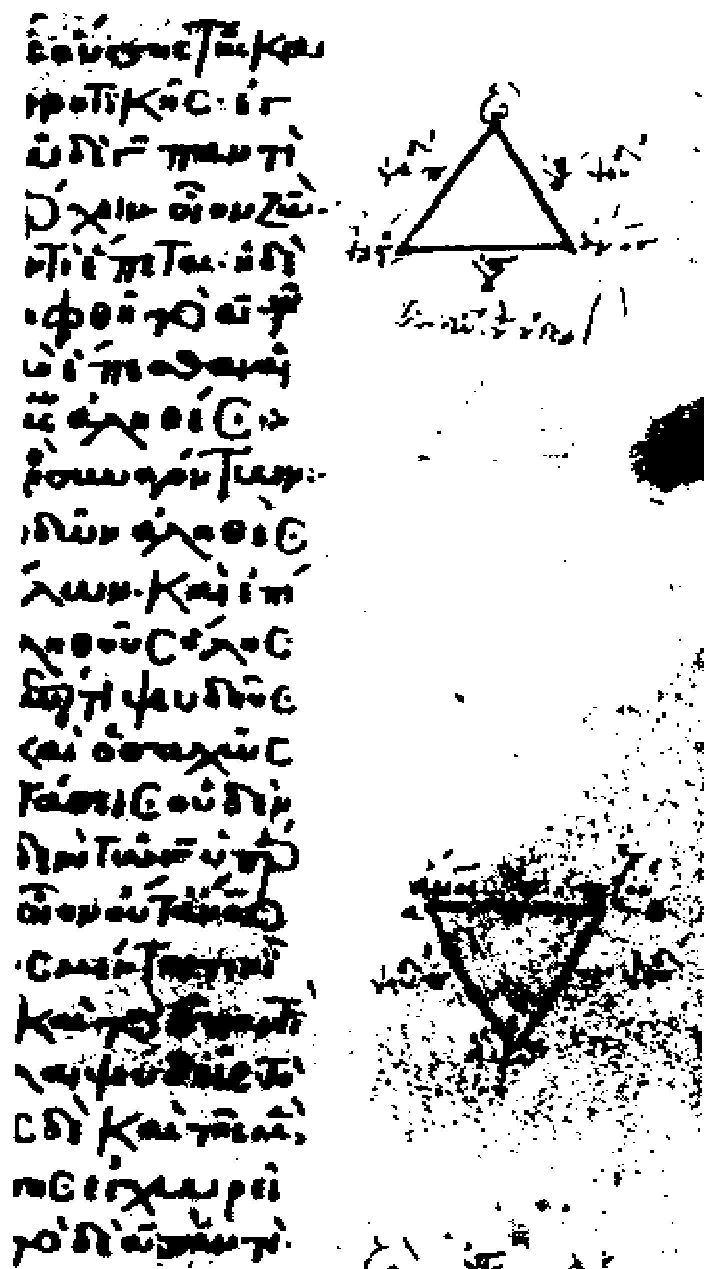
对分析机方案的注释.

纪念巴贝格和艾达,IBM公司建造了一个分析机工作模型作为纪念物.又为了表彰她在程序设计方面的功勋,人们用她的名字艾达(ADA)作为一种计算机语言的名称.

[174]

# 亚里士多德的一项工作

下图是亚里士多德后期手稿《分析》中的一段.该文指出几何与逻辑之间的联系.

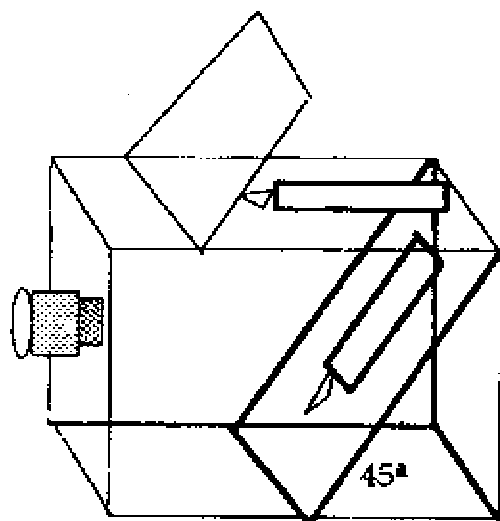


(此件摘自巴塞尔大学图书室)

## 暗　　箱

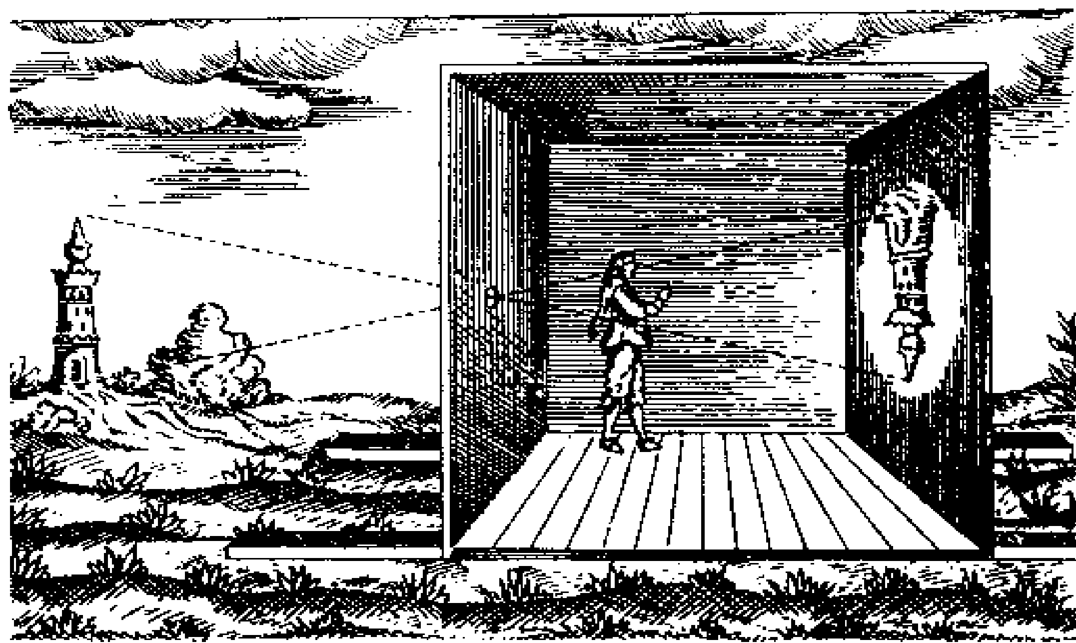
几个世纪来,暗箱令人生畏并占据了人们的想象.今天,用高技术的特殊效果,暗箱能够创造出一种令人难以置信的像,因而为世界各地的天文学家、艺术家、电影摄影师、发明家和魔术师所使用.

暗箱——意即黑暗的房间——是一项有趣的发明.人们可以推想最初发明暗箱的情景:某人进入一个黑暗的房间,那里有一束光线穿过一个非常小的洞射进来.设想进来的时候此人带有蜡烛并关好了门,这时由于偶然的因素蜡烛熄灭了.这人发现房间里有一束光线照射着并在墙上投影出一个像.令人惊讶的是,他所看到的竟是洞所在的墙外面的景象,只是像是倒立的.这就是最初的暗箱,它有一个黑暗的房间或盒子,带有一个能允许光线进入的针孔般的洞,光线透过针孔投射进外头倒立的像.千百年来,人们对此制作出各种模型.公元前4世纪,中国的墨家用暗箱进行他们的光学研究.公元8世纪,暗箱在伊斯兰国家也像在中国那样被广泛运用.达·芬奇也用过这类设计来迷惑人.在他的图画中,有一张显示了暗箱的用法,该画作于1519年.手提式的暗箱做得甚至只有人们的口袋那么大,16世纪艺术家们还将它改造用以描画暗箱外面物体的投射像.到了19世纪,凹凸透镜和镜子开始被用于产生正立和倒立的像.公元1826年,J·N·奈普斯通过暗箱把一个像投射在感光纸上,结果导致了摄影照相的发明.



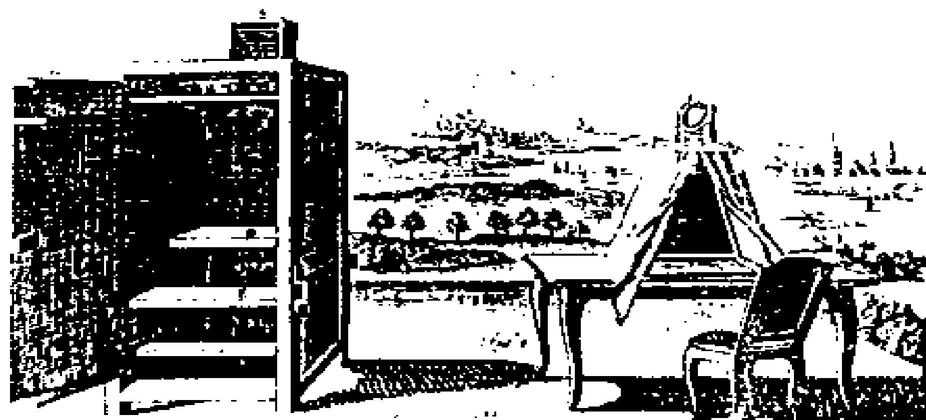
一只手提的暗箱

利用光学的科学原理和投影的数学概念,这种奇异而精巧的光



一个早期暗箱的内部.今天,人们用抛物形的屏幕,
机械装置和光学元件来产生一种精致的影像.

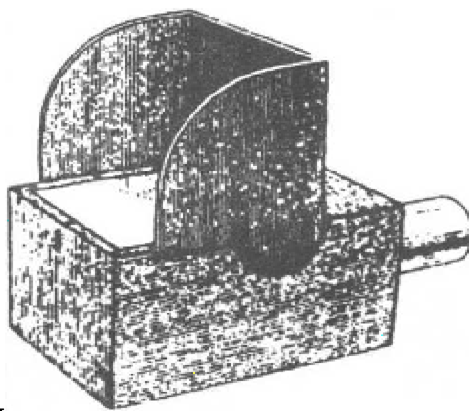
学器件可改造用于其他方面.例如,天文学家们用暗箱来观察太阳黑子的活动,使他们的眼睛不致受到损害等等. [177]



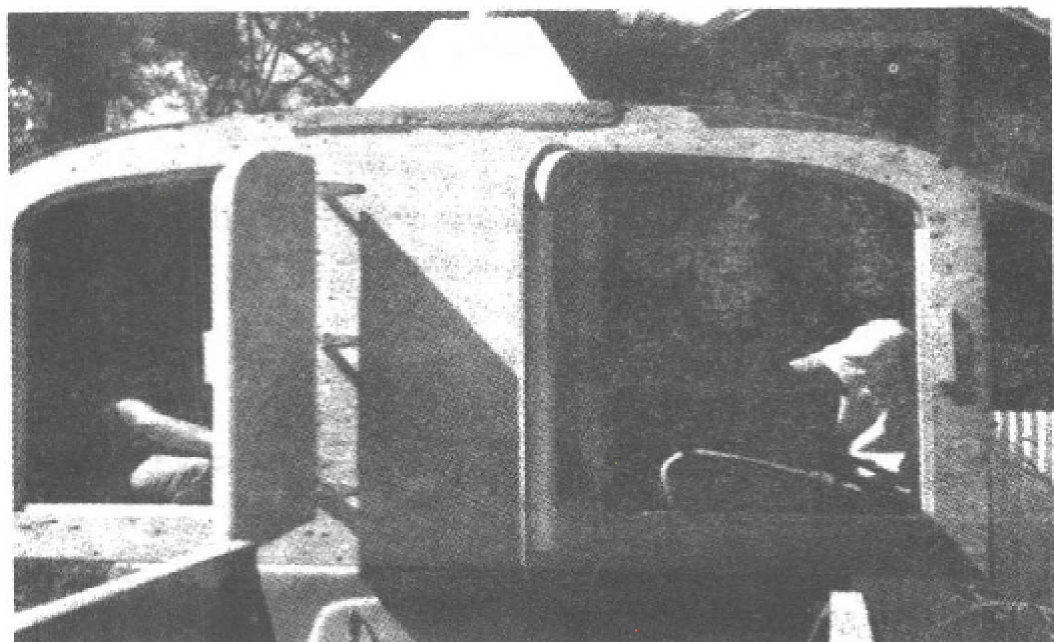
轿和帐篷——艺术家们用的暗箱模型.

今天,世界上只有少数几个场所可供人们亲身体验暗箱.其中之一是位于加利福尼亚旧金山的“悬屋”.它的特色是:它的光学元件“针孔”是安在屋顶上,通过机械装置可在18°的增量内

旋转,并通过一系列的镜子和凹凸透镜将外面的景观反射到一面抛物状的屏幕上,该屏幕直径将近有4英尺,进入这个黑暗的房间体验暗箱将给人一种不可思议的感受.首先,你似乎感到是在观看一幅运动的图画,但你会立即体会到这是一幅发生在外面的实际画面.真正使人吃惊的是,这一切都是由进入一个小洞的光线的投影创造的.当你亲眼看到这一切时,你就会对当初第一次发现暗箱时



一个19世纪30年代用的暗箱的盒子模型.



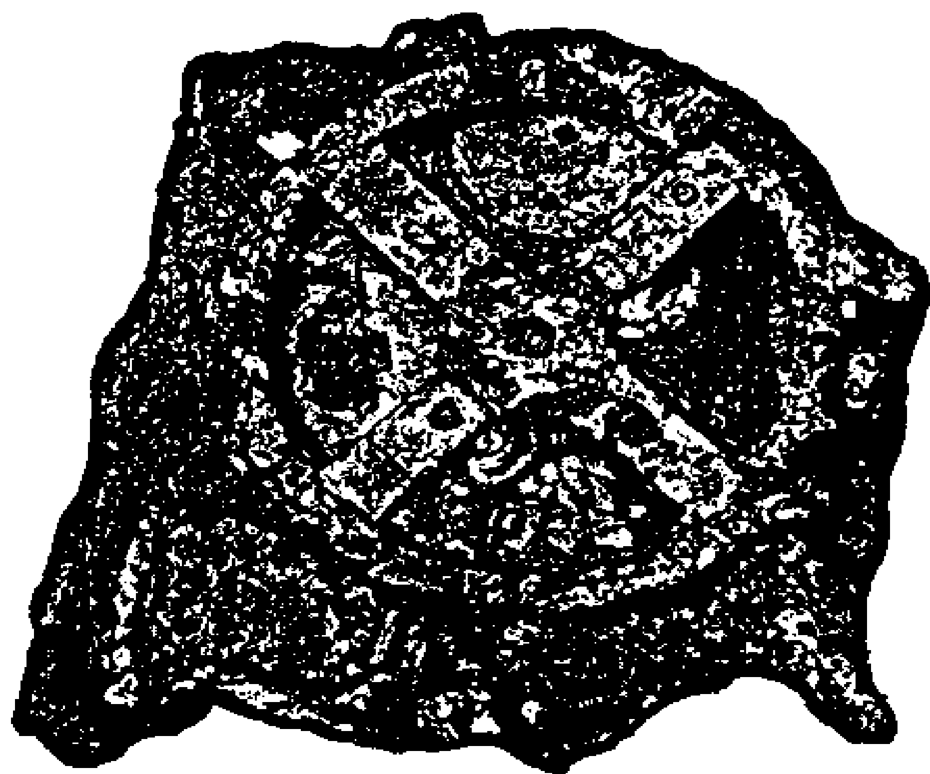
《双旗杆》——在亚利桑娜,人们建造的四人可动暗箱.

所产生的惊异作出评价.而你也就会了解为什么有人相信它是魔术或某种巫法.

[178]

# 一种古希腊的计算机?

公元1900年,一艘古代的失事船只在克利特岛附近的安特基西拉被发现.人们在船上找到了陶器、雕刻作品和青铜雕像.此外,在沉船上还发现了一件青铜造物.



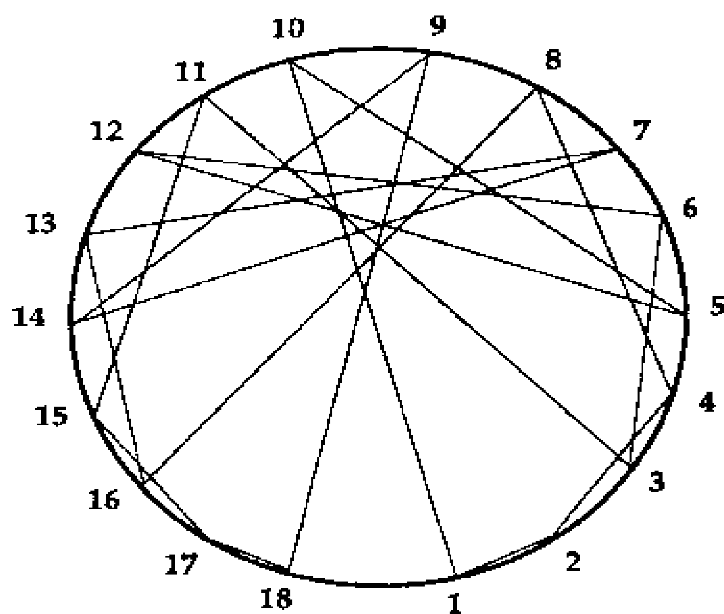
1951年,耶鲁大学的普利斯教授研究了这件造物,得出结论是:该物件约制作于公元前78年,其功能是作为古代希腊的一种计算机,能够确定太阳、月亮的运动以及过去、现在和将来月相的盈亏.他描绘这个物件是由指针、码盘以及多于30个不同大小平行啮合的齿轮组成.这些齿轮可以绕轴以不同的速度旋转.没有什么著作提到这一设计物时期的事,但一个类似的机

械曾经为西塞洛以及后来的奥维德所提到[①].西塞洛描述过一件公元前3世纪阿基米德的设计,该设计能模拟太阳、月亮及五[179]种行星的运动.

① 译者注:西塞洛(Cicero,公元前106—公元前43)是罗马时期的政治家、演说家和作家.奥维德(Ovid,公元前43—公元17)是罗马诗人.

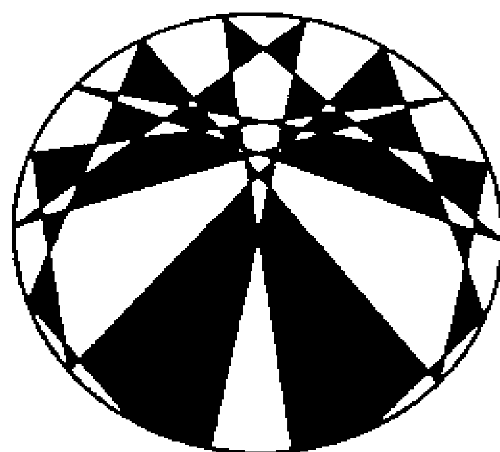
# 模数——算术的艺术

当数从模数的算术表变换到圆上时会出现许多有趣的图案．例如，下图是由模(MOD)19的乘法表中第“2”行产生的(该行通常描述为19,2)．




模19的乘法表

| × | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 |
| 4 | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 3 | 7 | 11 | 15 |
| 5 | 0 | 5 | 10 | 15 | 1 | 6 | 11 | 16 | 2 | 7 | 12 | 17 | 3 | 8 | 13 | 18 | 4 | 9 | 14 |
| 6 | 0 | 6 | 12 | 18 | 5 | 11 | 17 | 4 | 10 | 16 | 3 | 9 | 15 | 2 | 8 | 14 | 1 | 7 | 13 |
| 7 | 0 | 7 | 14 | 2 | 9 | 16 | 4 | 11 | 18 | 6 | 13 | 1 | 8 | 15 | 3 | 10 | 17 | 5 | 12 |
| 8 | 0 | 8 | 16 | 5 | 13 | 2 | 10 | 18 | 7 | 15 | 4 | 12 | 1 | 9 | 17 | 6 | 14 | 3 | 11 |
| 9 | 0 | 9 | 18 | 8 | 17 | 7 | 16 | 6 | 15 | 5 | 14 | 4 | 13 | 3 | 12 | 2 | 11 | 1 | 10 |
| 10 | 0 | 10 | 1 | 11 | 2 | 12 | 3 | 13 | 4 | 14 | 5 | 15 | 6 | 16 | 7 | 17 | 8 | 18 | 9 |
| 11 | 0 | 11 | 3 | 14 | 6 | 17 | 9 | 1 | 12 | 4 | 15 | 7 | 18 | 10 | 2 | 13 | 5 | 16 | 8 |
| 12 | 0 | 12 | 5 | 17 | 10 | 3 | 15 | 8 | 1 | 13 | 6 | 18 | 11 | 4 | 16 | 9 | 2 | 14 | 7 |
| 13 | 0 | 13 | 7 | 1 | 14 | 8 | 2 | 15 | 9 | 3 | 16 | 10 | 4 | 17 | 11 | 5 | 18 | 12 | 6 |
| 14 | 0 | 14 | 9 | 4 | 18 | 13 | 8 | 3 | 17 | 12 | 7 | 2 | 16 | 11 | 6 | 1 | 15 | 10 | 5 |
| 15 | 0 | 15 | 11 | 7 | 3 | 18 | 14 | 10 | 6 | 2 | 17 | 13 | 9 | 5 | 1 | 16 | 12 | 8 | 4 |
| 16 | 0 | 16 | 13 | 10 | 7 | 4 | 1 | 17 | 14 | 11 | 8 | 5 | 2 | 18 | 15 | 12 | 9 | 6 | 3 |
| 17 | 0 | 17 | 15 | 13 | 11 | 9 | 7 | 5 | 3 | 1 | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 |
| 18 | 0 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |



|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |

这是模 19 乘法表上第"2"行的元素,由它可以创造出上面的图案:将从 1 至 18 的数像钟面上数字那样等间隔地写成一圈.然后用线段将对应的数连接起来,如下:

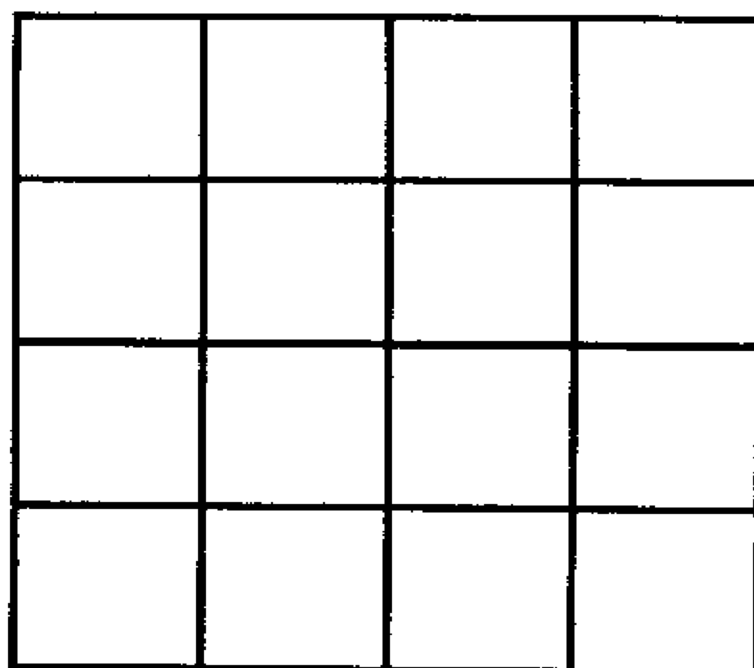
1 与 2,2 与 4,3 与 6,4 与 8,5 与 10,6 与 12,

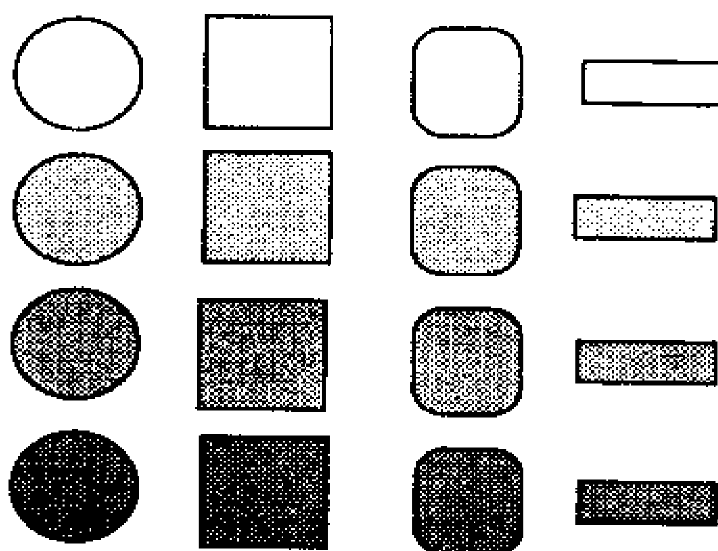
7 与 14,8 与 16,9 与 18,10 与 1,11 与 3,等等.

[180] 然后用不同的方法涂色以产生艺术图案.

## 形状与颜色谜题

每种形状都有四种色调，把它们放在格子里使得每行和每列都有四种不同的形状和四种不同的色调.





(解答见附录)

## $e^{\pi\sqrt{163}}$ = 整数?

三个无理数 $e$, $\pi$ 和 $\sqrt{163}$ 能够联合形成一个整数,这似乎太令人惊奇了!事实上,印度数学家S·拉马努贾(Srinivasa Ramanujan,1888—1920)首先推测 $e^{\pi\sqrt{163}}$ 是一个整数,因为他发现该数值为:

262537412640768743.999…

因而感到可能会是一个整数.

公元1972年,人们用计算机计算,居然得到小数后两百万位的9,但是要成为一个整数,人们必须知道这个9是否永远重复.

最后,亚利桑娜大学的约翰·布里洛证明了这个数等于262537412640768744,他真的证明了吗①?

262537412
640768744

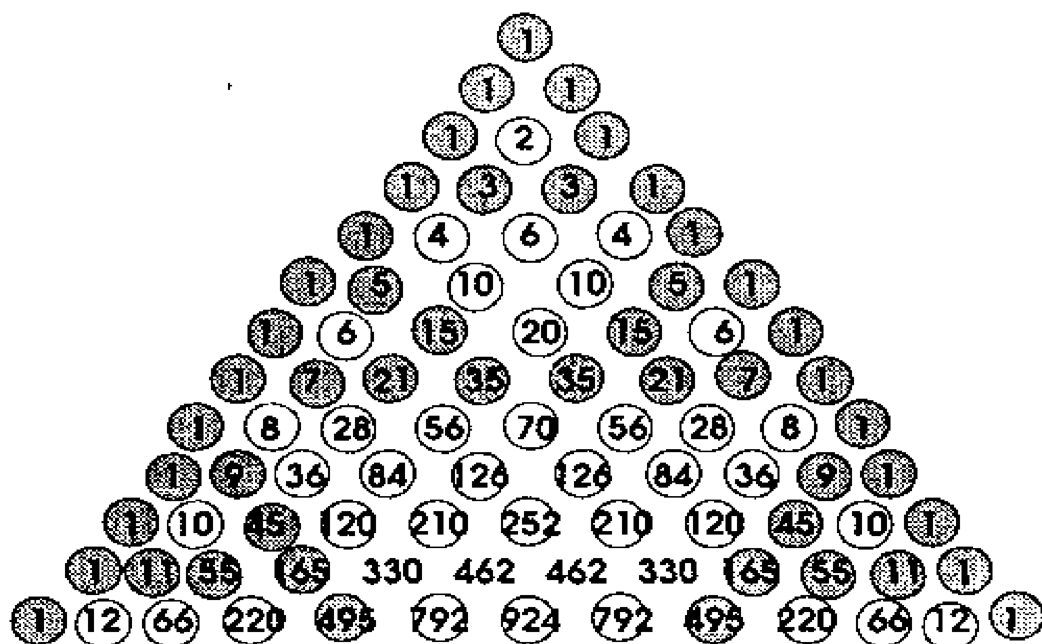
[182]

① 原注:事实上这个数不是一个整数.这个近似值只是愚人节(每年4月1日——译者)的一种数学玩笑,刊于1975年4月出版的《科学美国人》上.见288页另一个马丁·加德纳玩笑,该玩笑引自马丁·加德纳《时间旅行》一书第136页.

## 帕斯卡(算术)三角形的图案

当帕斯卡三角形的数用以下方式盖住时,将出现一种迷人的图案:如果是奇数,则画一个圆圈并用铅笔将它涂成灰色;而当它是偶数时,则将只在数上画一个圆圈.

在这样的帕斯卡三角形(也称算术三角形)中,这种由数形成的图案自我放大,并且像人为一样自上而下地推进.

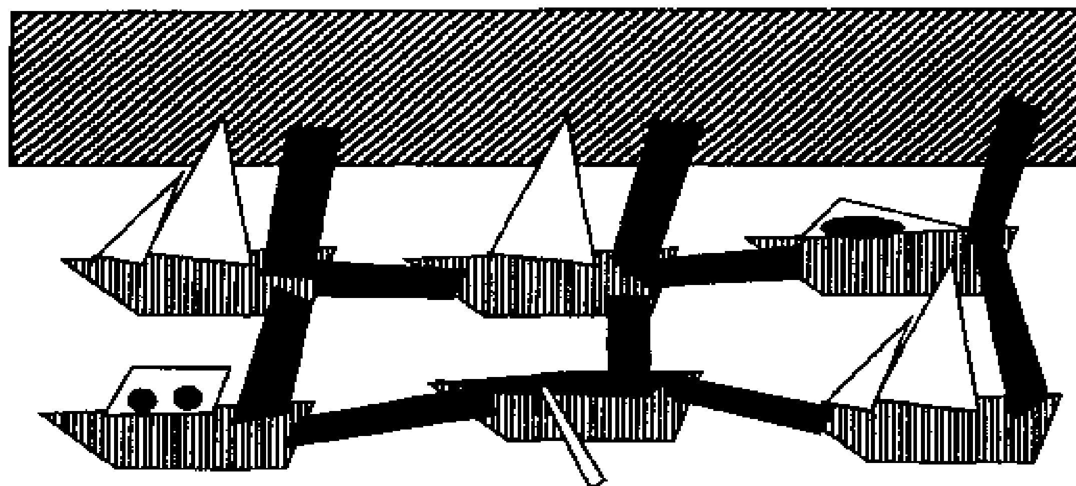



上面的图案实际上是一种2的倍数的图案,当进一步扩展时图案会更加有趣.你希望看到用其他倍数画圆圈时所得到的图案吗?用3的倍数试试看!

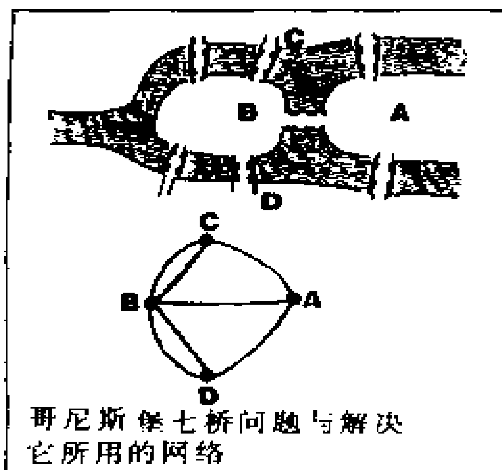
[183]

## 船 坞 问 题

有一个停泊位短缺的船坞，有六只船如图停泊在那里，互相之间架起跳板以利走动.你能从船坞出发走过每根跳板而且只走一次，最后返回船坞吗？在回答中检验一下你的网络知识.



公元 1736 年，欧拉(Leonard Euler，1707—1783)用网络的概念解决了哥尼斯堡七桥问题.




哥尼斯堡七桥问题与解决它所用的网络

一个网络是一张用以解决问题的图.对于哥尼斯堡七桥问题欧拉所用的网络是这样的，他用弧线表示桥，用点表示与桥交汇的陆地.他推出结论，一个能一笔画画成的网络最多只能有两个奇顶点(一个进，一个出).正如我们在图中看到的那样，哥尼斯堡七桥问题的网络有 4 个奇顶点，因而它是不可能一笔画画成的.船坞问题则可看成哥尼斯堡桥问题的现代的型式.

 (解答见附录)

## 俄罗斯农夫的乘法

虽然它是原始的，而且时间可以追溯到古埃及，但今天我们仍把这种乘法说成是俄罗斯农夫的乘法.

**158 乘以 39**

| | | |
|---|---|---|
| 158 | ~~39~~ | 第二列中没有划掉的数的总和 |
| 79 | 78 | |
| 39 | 156 | 78 |
| 19 | 312 | 156 |
| 9 | 624 | 312 |
| 4 | ~~1248~~ | 624 |
| 2 | ~~2496~~ | + 4992 |
| 1 | 4992 | 6162 此即答案 |

程序：

1）把要相乘的两个数放在两列的开头；

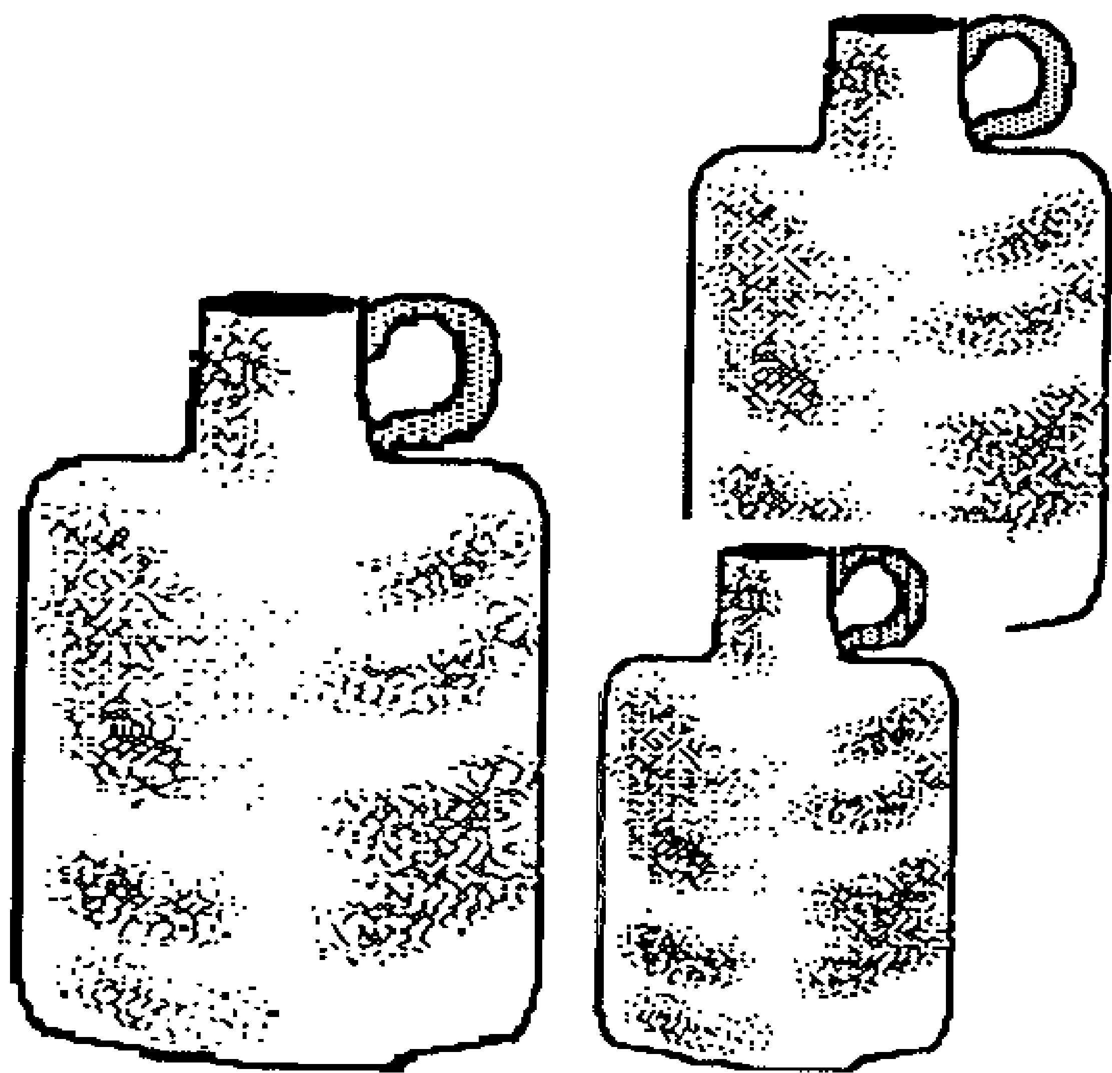
2）把第一列的数不断地除以 2，如有余数则不去管它，直至得到数 1 为止. 第 2 列数则不断地翻倍，直至达到第一列的最后一行；

3）现在划掉第二列中与第一列中的偶数位于同一行的数；

4）将第二列中留下的数相加即给出所求的积.

[185]

# 水 壶 问 题



有一个8公升装满苹果酒的壶，和一个3公升一个5公升的空壶．你要怎么操作才能将苹果酒平分成两个4公升？



（解答见附录）

# 斐波那契幻术

有一种幻术戏法的数，其秘诀与类斐波那契数列有关.斐波那契数列是：1，1，2，3，5，8，13，……数列中的每一项都是前两项的和.任何由上述方式形成的序列都称为类斐波那契数列.

挑选任两个数作为类斐波那契数列的头两个数.假定你选的是5和7，写出尽可能多的新数，这些数每个都等于前两个数的和.

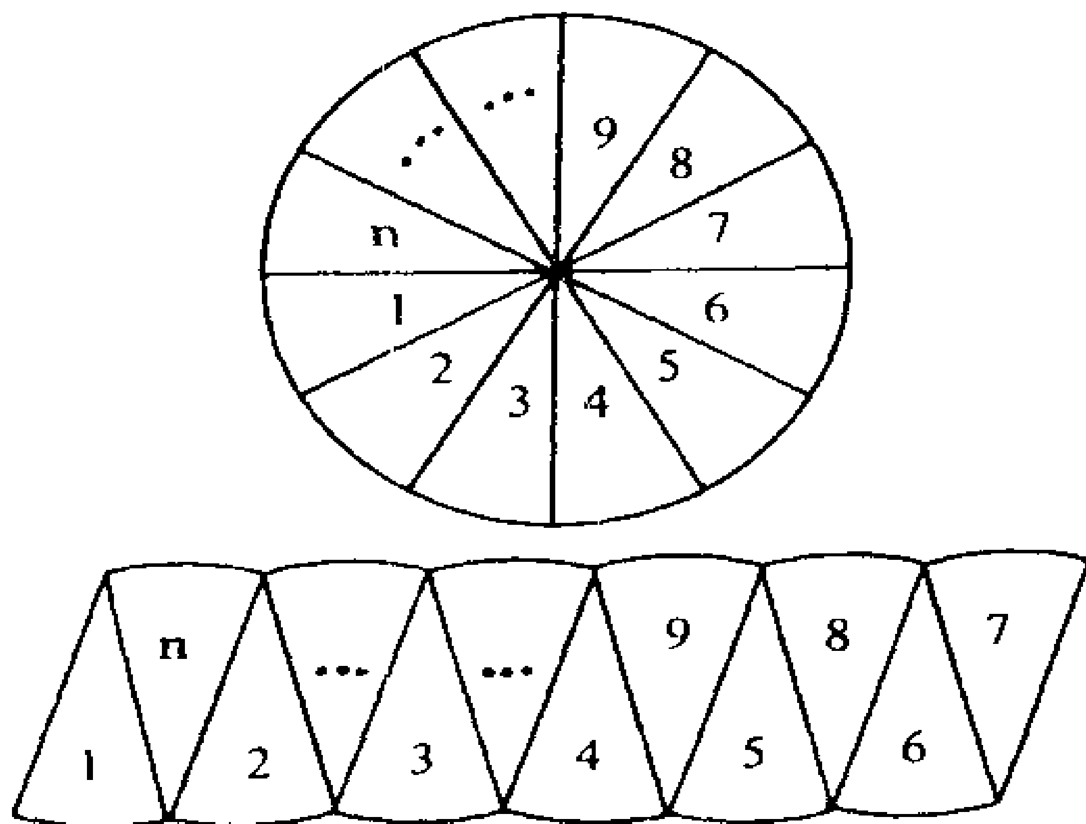
在所列的任意两数中间划上一条线.则线上所有数的和永远等于线下面的第二个数减去开头的第二个数.对于上述情况，这个和为 555－7＝548.

你能说出为什么总是这样吗？

5
7
12
19
31
50
81
131
212
―――――
343
555
898

## 开普勒对于圆面积的推导

开普勒(Johannes Kepler, 1571—1630)发展了一种非常有趣的方法，通过它可以解析圆的面积公式是怎样得到的.




假定把圆分为 $n$ 个扇形，它们都是全等的等腰三角形. 由于这些等腰三角形是来自同一个圆，因而它们的高都等于圆的半径. 当将它们如图放在一起时，就构成了平行四边形的样子. 一个平行四边形的面积可由底乘以高求得. 在这种情况下，底为圆周长的一半，即$\frac{1}{2}$的直径乘以 $\pi$，或$\frac{1}{2}d\pi=\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot\pi=r\pi$. 该平行四边形的高与等腰三角形的高一样，即 $r$. 因而，圆的面积 = 平行四边形的面积 = $(r\pi)\cdot r=\pi r^2$.

[188]

# "双关"游戏

卡洛尔是C·L·道奇森的笔名，但作为作家的卡洛尔跟作为数学家的道奇森，在他的同事中两者一样知名.除《阿丽丝漫游奇境记》和《阿丽丝穿越镜子》之外，卡洛尔还写了不少数学的书.在卡洛尔的许多作品中可以发现数学的影响.他对于把数学概念转为娱乐形式取得了一条秘诀.

"双关"是卡洛尔创造的一种游戏，这种游戏如今已变得非常流行.它是从两个同样长度的词开始的，例如CAT(猫)和DOG(狗)，把一个词通过一系列同样长度的词，每次只改变一个字母而变为另一个词.如

CAT
BAT(蝙蝠)
BAG(包)
BOG(沼泽)
DOG

游戏的目标是使这种转变用词的数最少.

英国杂志《浮华世界》开展了一场"双关"游戏的竞赛.他们首次竞赛的题目是：

——Prove GRASS to be GREEN (证明草变绿了)
——Evolve MAN from APE (从猿进化成人)
——Raise ONE to TWO (从一提高到二)
——Change BLUE to PINK (变蓝色为粉红色)
——Make WINTER to SUMMER (使冬天成为夏天)
——Put ROUGE on CHEEK (把胭脂搽到颊上)

## 音阶——数学对于耳朵

光速 $c$, $\pi$, $e$, $\phi$ 和阿伏伽德罗数等都是宇宙常数的例子.有的数在一些公式和方程中起着重要的作用,这些公式和方程阐释了我们世界的种种对象,诸如几何、物理、化学或商业等.在一些著名的常数中,八度音程的概念可说是一种特殊的自然常数.第八音在音乐世界担负着非常重要的角色,它建立了音阶的单位和距离.正如圆的周长与它直径的比总是 $\pi$ 那样,拨一根弦与拨一根长度只有一半的弦$\left(\text{即长度比为}\frac{1}{2}\right)$其振动发出同样的音调,并构成了一个音阶的长度①.较短的弦比原来的弦每秒振动的次数多一倍.

音调的数目,或者一个音阶的再分细是随意的,它是受开始创造一个特殊音阶时的种种因素的影响.构成一个音阶的声音或音调每一种都有专门的频率②.正如说过的那样,分别为第八音的两个音调,其频率一个是另一个的两倍③.一只训练有素的耳朵能听出单个音程里近 300 种的声音或音调.不过,传统的乐器不可能产生许多音调,对此过高的期望是不现实的.例如,要使单音程中有 300 种音调,那么钢琴就要有 2400 个琴键.你能想象一位钢琴家要怎样在这种键盘上来回奔跑?因此,可能存在的音调数目不仅受到我们耳朵生理上的限制,而且还受乐器能力的限制.那么怎样从这 300 种可辨认的声音中选出构成音

① 原注:术语第八音(octave)来自拉丁词 8.一个全音阶有 7 个不同的音调,从 C 调到 B 调和高 C 调,第八音则是第八音调.

② 原注:频率是每秒振动的次数.声音和它的频率数之间存在着一一对应,尽管我们的耳朵还无法辨别全部可能的声音.

③ 原注:拨一根弦会产生一定的音调,例如 C 调,每秒振动 264 次.当弦长减为原来的一半长度时,它就产生第八音,其振动频率为每秒 528 次.

阶的音调呢？选取一个音阶中的音调类同于选取一个计数系统，那么这种选取要基于什么，又哪一种符号可以用来表示这样的数呢？

对于一个音阶，需要由所选取单个音程弦的长度及细分的数（音调构成音阶）来确定．我们发现，它就像计数系统那样在不同的文明里演化是不一样的．在古代希腊，人们是用字母表的字母来表示他们音阶里的七个音调的．这些调子是四弦（四个音调）的组合，而把这样的一组放在一起称为音阶，这种音阶是现 [190]



代西方长音阶和短音阶的先驱．中国人用的是一种五声（五个音调）音阶．在印度，音乐是在特定范围内由"贱民"即兴演奏的，其音阶分为 66 个音级（"苏鲁提"），虽然实际上只有 22 个"苏鲁提"，但由它们形成了两个基本的七调音阶．波斯的音阶分为 17 音调或 22 音调．我们看到，虽然音阶是不变的，但它还是演化出许多不同的音乐体系．自然地，对某个特定文化的乐器，是不能

用以演奏另一特定文化的音乐的.

*　　　*　　　*

乐器、花瓶、雕像等物品以及描绘声乐和器乐的音乐家的壁画在考古中被陆续的发掘和发现.其中不乏许多早期的音乐作品.例如,在伊拉克发掘的秀默人(古代幼发拉底河下游的一个种族——译者)的显示出八调音阶的泥板(约公元前1800年);[191] 古希腊的纸草文简和雕刻在石头上的书文碎片(约公元100年);一份音调用字母来写的希腊人手稿(约公元300年);以及一份西班牙出土的穆斯林——阿拉伯人圣歌手稿;等等.

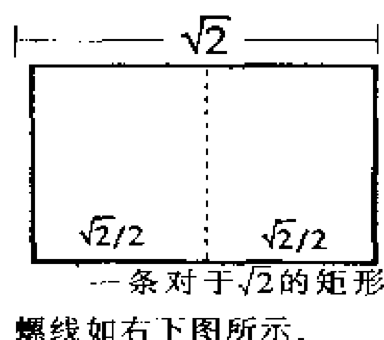
在公元前6世纪,毕达哥拉斯和他的信徒们最先把音乐和数学结合起来.他们坚信,数以某种方式统治着万物.可以想象,当他们发现一个调的音程、周期以及在弦构造上音调的比时欣喜的程度.他们还发现音乐的和声与整数之间的联系,认识到音调依赖于所弹弦的长度.他们发现,整个音阶能够由弦长的整数比产生①.

音阶是产生音乐所必须的吗?如果是这样,那么鸟儿歌唱又怎么说呢?在许多口头演出或讲述中,变化一个调子也只是口部轻微变换而已!当然,对于一种合作的演奏音阶是紧要的.音阶是音乐的写作语言,就像方程和符号是数学的写作语言一样.[192]

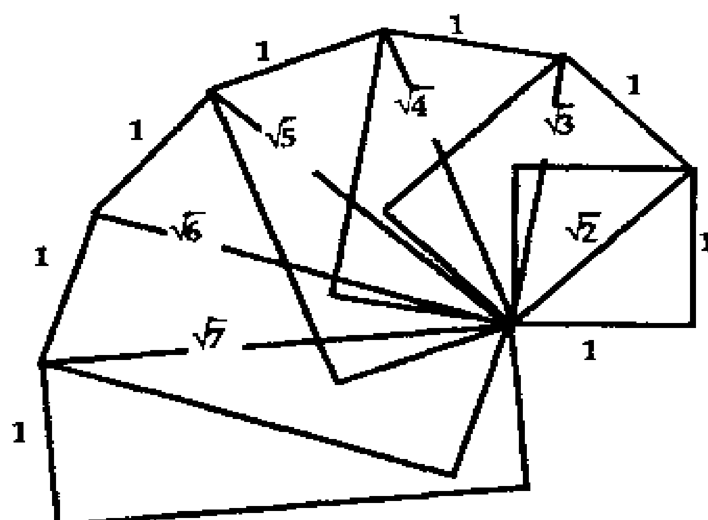
① 原注:例如,开始时弦产生C调,然后C长度的$\frac{16}{15}$产生B调,C的$\frac{6}{5}$产生A调,C的$\frac{4}{3}$产生G调,C的$\frac{3}{2}$产生F调,C的$\frac{8}{5}$产生E调,C的$\frac{16}{9}$产生D调,而C的$\frac{2}{1}$给出低C调.此外,他们相信行星各有它们自己的音乐,天体能产生音乐的声音.上述见解以"天体的音乐"著称.就连开普勒也相信这种天体的音乐,他甚至为每个已知的行星写了谱.今天,天文学家们已从太阳风里接收到无线电讯号.这些声音包括呼啸声、爆裂声、啜泣声,在速度增大时综合的嘘嘘声则更加悦耳.科学家们还观测到来自太阳的振荡,这使得他们能够推测太阳在各种时期的振动.

# 动 态 矩 形

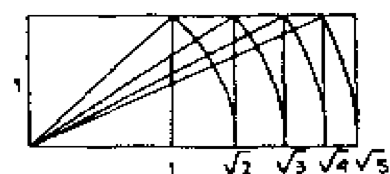
动态矩形是这样的矩形，它能够如同下图由单位正方形产生．它包含黄金矩形与平方根矩形两族．这些矩形尤其令人兴奋的地方在于，它们中的每一种都能形成富有生气的螺线（对数螺



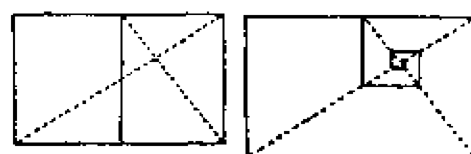

一条对于$\sqrt{2}$的矩形螺线如右下图所示．




线）．后者在自然界（尤其在图案生成的领域）和艺术设计（在设计中要求特殊的比例）上有着广泛的应用．




每种动态矩形还能产生一种矩形的螺线．在$\sqrt{2}$矩形中所形成的螺线如图所示．



一个矩形的螺线

在边为 $1:\frac{1}{\phi}$ 的矩形螺线中$\left(\frac{1}{\phi}\text{为黄金均值的倒数}\approx\frac{1}{1.618\cdots}\approx 0.618034\right)$，螺线的长度等于黄金比值 $\phi$．

$\sqrt{2}$的动态矩形特别有趣．因为它是唯一一个其一半相似于整体的矩形．

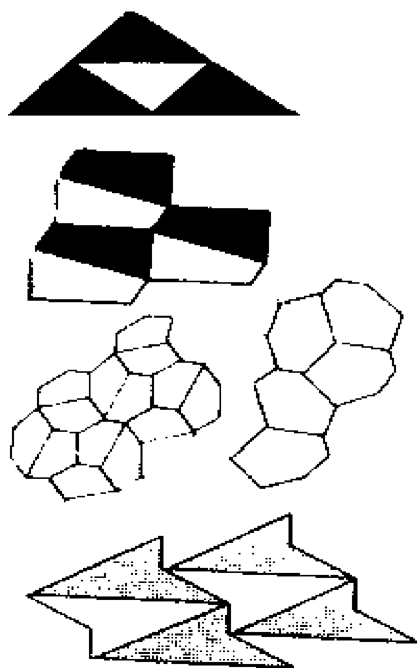


[193] 由动态矩形做成的图案

# 创作不规则的数学镶嵌

近些年来，数学家们发现和设计了许多用多边形镶嵌平面的方法．下面是他们发现的一些要点：

● 多于六边的凸多边形不可能镶嵌一个平面．



● 对于3边的凸多边形：

任何三角形都可以用以镶嵌一个平面．

● 对于4边的凸多边形：

任何形状的凸四边形都能够通过旋转、反射和平移来镶嵌一个平面．

● 对于5边和6边的凸多边形：

只有特定的凸5边形或凸6边形可作镶嵌．对一般的凸5边形或凸6边形则要具体分析．上图是一些例子．

● 对于非凸多边形：

对非凸多边形的考虑甚至更加有趣.大量的研究都集中在用全等的非凸多边形的镶嵌上,诸如用五米诺或多阶米诺[①],或者多阶三角[②],或者多阶六角[③].但对于它们,许多问题尚留待解决.不过有一件东西是肯定的,那就是美丽的数学镶嵌将会被不[194]断地创造出来!

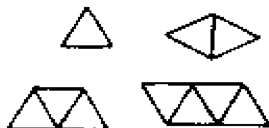
---

① 原注:多阶米诺是由许多全等的正方形构成.例如一个五阶米诺是由五个全等的正方形用不同的形式连结在一起而组成的.

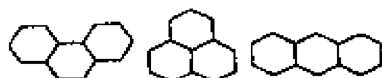


一个五阶米诺镶嵌的例子

② 原注:多阶三角是由全等的等边三角形组成.



③ 原注:多阶六角是由全等的正六角形组成.



能独立镶嵌平面的多阶六角例子

# 环 绕 地 球

设想一根绳子准确环绕在地球的赤道上，如果将绳子加长一码，它能够很容易看出来吗？如果绳子上每一点离地面的高度都一样，那么这根新的绳子离开地球多大的距离呢？



假设赤道的周围有 25000 英里长[1]。

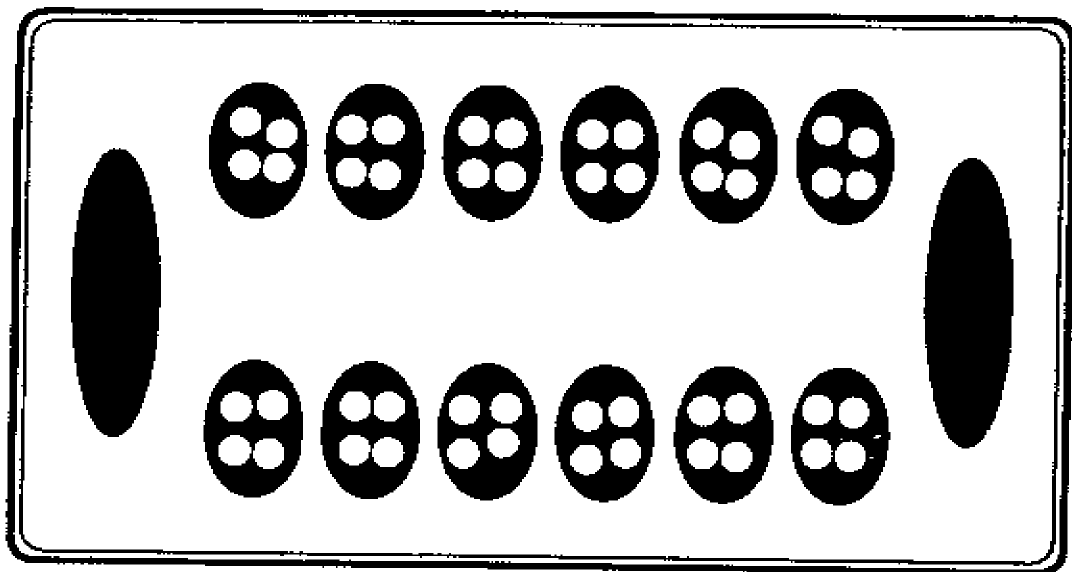
（解答见附录）

[195]

[1] 译者注：一英里折合成公制为 1.609 千米，赤道长度 25000 英里约合 40000 千米。

## “门卡拉”游戏

“门卡拉”是3500年前起源于埃及的一类游戏名称.在吉普斯金字塔和埃及其他圣庙的考古挖掘中,人们发现了刻在石板上的游戏盘.在后来的一千多年,穆斯林人在“门卡拉”的传播上起了主要作用,他们把它介绍到他们所征服的地区.“门卡拉”的名字是从阿拉伯词“naqala”得到的,该词是表示“移动”的意思.后来非洲的奴隶们将这个游戏带到苏里南(位于南美北部荷属圭亚那——译者)及西印度,从那里欧洲人学到了“门卡拉”.今天,这种游戏仍然在中东、东南亚和非洲的许多国家内流行.大概它是历史上玩的时间持续最长的一种游戏.



“门卡拉”游戏开始时的摆放方式.

经过长时间的演变,这种游戏的方式已多达200种以上,其中最漂亮的一种“门卡拉”样式,可以在任何地方玩,带不带那种正式的木制或陶制的棋盘和棋子都无所谓.这种棋盘可以很容易改画在沙滩、地面或纸张上,石头、念珠、豆子、贝壳或者玉米都可以用来作为棋子.

“门卡拉”游戏是专供两人玩的,这里介绍的是东非的“门卡

拉"样式.

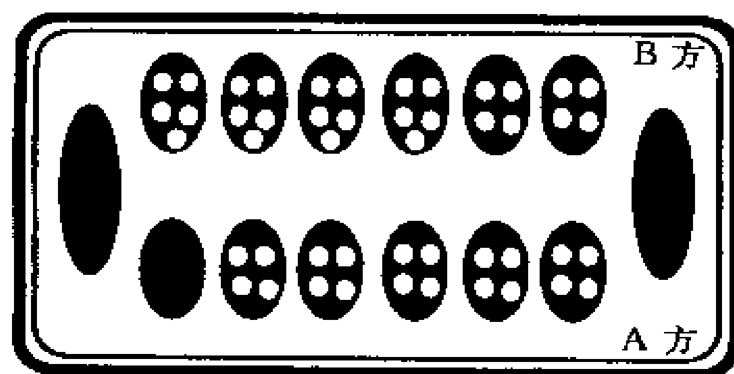
**棋盘:**

棋盘由12个挖好的凹井组成,这是游戏的地盘,另有两个凹井设在两头,是作为贮放被俘获的棋子用的.

在12个凹井的每一个上各放4个棋子.

**移动:**

游戏者两人各选一方,轮流移动.一方选手可以选取自己一方的某个井里的棋子移动.拿空该井的棋子,并沿顺时针方向在空井后的每一个井上各放一个棋子,直至拿出的棋子用完,但放的过程中不允许跳过或多放.如果一个井里有14个棋子(哪怕是对方的)则该选手必须把它拿出一些分给其他的井,按顺时针方向每井一个,但起先拿空的那个井则不予理睬(不放棋子).




棋盘上显示选手A的第一次移动.

**游戏的目标:**

游戏的目标是俘获对方的棋子.

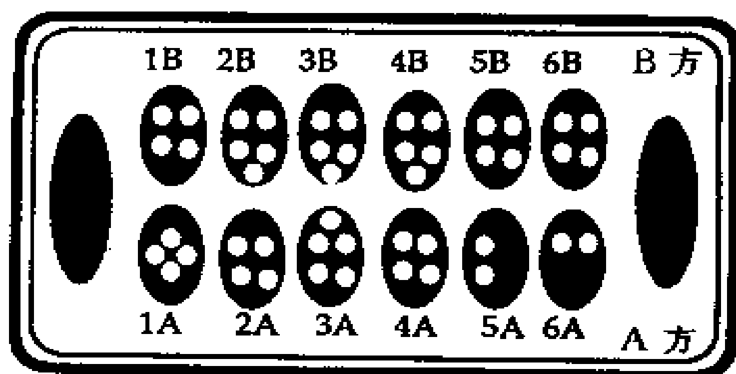
当你手上最后一个棋子进入对方的井,而该井内只有1个或2个棋子时,这些棋子就算被你俘获了,你可将这些俘获的棋子放入自己一方的贮存井里.在俘获对方井中的棋子时,该选手还可以拿掉它前一个井中的棋子,如果这个井是对方的而且上面只有2或3个棋子.你还可以继续俘获对方井里的棋子,只要

[197] 这些井是连在一起而且每个井都只含2或3个棋子.

**特殊规则:**

一名选手不允许拿走对方全部井中的棋子,尽管游戏中他有可能这样做.总之,必须永远留给对方一个移动的机会.

如果你的对方的井已经全部空了,那么在你移动期间必须至少留下一个棋子在你对方的井里.




对于棋盘上的形势.选手B可移动他3B井上的棋子并俘获对方5A井上的棋子及它前一个6A井上的棋子.

**游戏的结束:**

当一方全部的井都空了,而又正值他或她移动时,游戏便告结束.

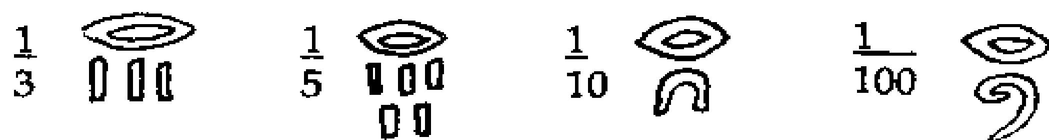
选手所拥有的棋子,包括盘上自己井中的棋子和放在自己一方贮存井里的棋子两者的和.

游戏结束时拥有棋子多者胜.

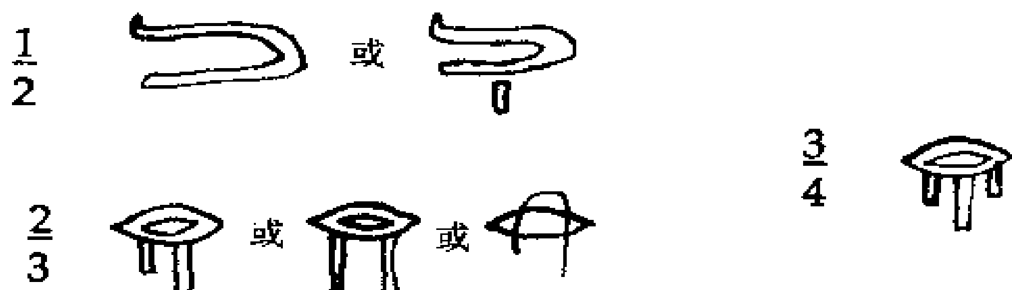
正如几个世纪来所做的那样,"门卡拉"游戏还可以通过增[198]加更多的棋子或修改规则等进行改动和变化.

# 埃及分数与太阳神的眼睛

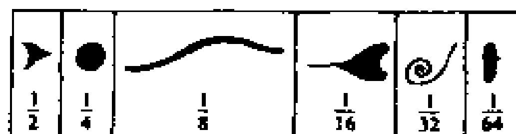
埃及人发展了一种书写分数的方法，这些分数的分子为1.他们用以书写分数的符号“◎”像一张嘴巴.当该符号用于某个数时即意味着“部分”，写在数的上方，就像我们今天写分数$\frac{1}{3}$时用一条线段横在中央一样.埃及人对三分之一等分数是这样写的：



对于分子不是1的分数，例如$\frac{3}{5}$，他们则改写为$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$.对于常用的分数则采用了专门的记号



当需要用分数来表达液体的体积，谷物或农业的生产量等等时，太阳神眼睛的各个部分就被设定为特殊的分数值.其起源与司丰饶的女神、知识与魔法之神、太阳神等神话相联系，右图列出了一些分数值——$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，$\frac{1}{32}$，$\frac{1}{64}$——埃及人将它与太阳神眼睛的每个部分结合起来.

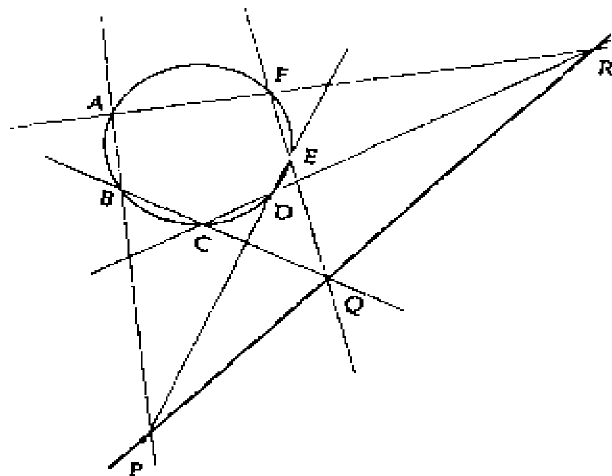


[199]

# 帕斯卡的令人惊异的定理

著名的法国数学家帕斯卡[①]（Blaise Pascal，1623—1662）发现并证明了以下定理：

——内接于任意圆锥截线




① 原注：帕斯卡在理论数学和科学发现的许多方面都享有盛誉．他的工作包括对帕斯卡三角形、六线形、液体理论、水压机以及概率论等方面的广泛发现．此外，18岁时他还发明了一种加法计算机．但在1654年后他改信基督，从而基本上结束了他的数学工作．下面的摘录引自他的随笔《思想》．他用许多数学的引证和例子回答了对他的种种议论，并指出他这样做是因为：

"……推广我们的概念就像超出我们能够想象的空间那样，在跟事物的现实比较中，我们只是一些原子．空间是一个无限的球体，每个地方都是它的中心，没有哪里是它的周围，简而言之，它是上帝万能的最大标记，而在这种想法下，我们的想象便失却了它自身的意义……所有东西的进程都是从无而来，并生于无限．是谁主宰这些令人惊异的进程？只有这些奇迹的作者才了解它们；此外没有一个人能……我知道人们无法理解，如果我们从零里拿去四，那么零还会留下什么？太多的喜好扰乱着；太多的音乐和声令人不安；太多的圣俸刺激着；但愿我们能有偿还这种债务的办法．"

的六边形，当它的边延长成直线 $AB$，$BC$，$CD$，$DE$，$EF$，$AF$ 时，则三组对边的交点 $P$、$Q$ 和 $R$ 总是共线.

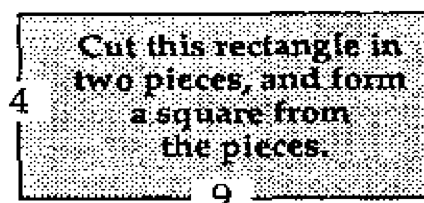
用这个定理能够推演出许多我们知道的有关圆锥截线的知识！有将近 400 种该定理的推论因而获证.

此外，用投影的概念（由 G·笛沙格发展）帕斯卡说明了除圆以外其他圆锥截线的定理. [200]

# 智力练习题

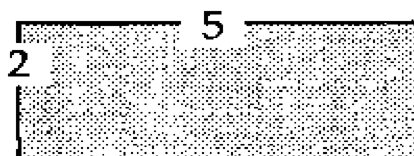
## 剖分谜题

该问题是要把一个矩形剖分为正方形.这类问题可以追溯




分矩形为两块,使这两块能组成一个正方形.

到18世纪及法国数学家J·E·曼图克拉.后来这种特殊问题由美国谜题专家洛依德(Sam Loyd,1844—1911)和英国谜题专家杜登尼(Henry Dudeney,1847—1930)加以推广.

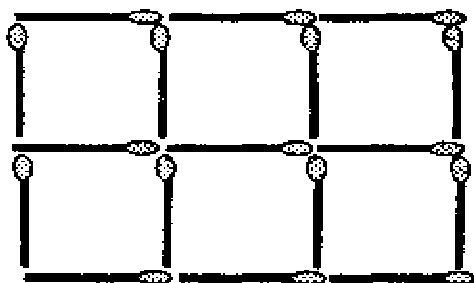


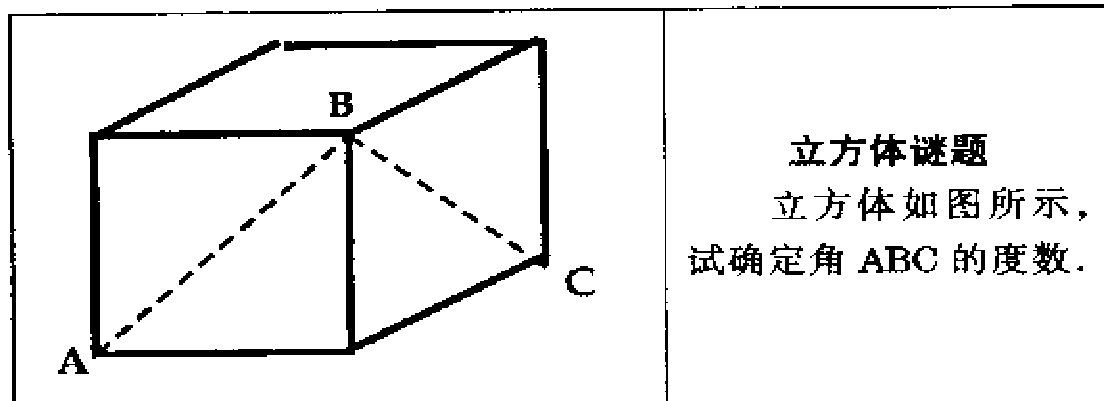

分该矩形为三块,使这三块能组成一个正方形.

H·林格仁是今天这类问题的专家之一,他写了一部相关内容的完整的书,题目叫《几何剖分》.

## 火柴杆谜题

拿掉图中的五根火柴杆,使得剩下的是三个与原来一样大小的正方形.






**立方体谜题**

立方体如图所示，试确定角 ABC 的度数.

[201]

## 数学与折纸

一个正方形变形为一个盒子.

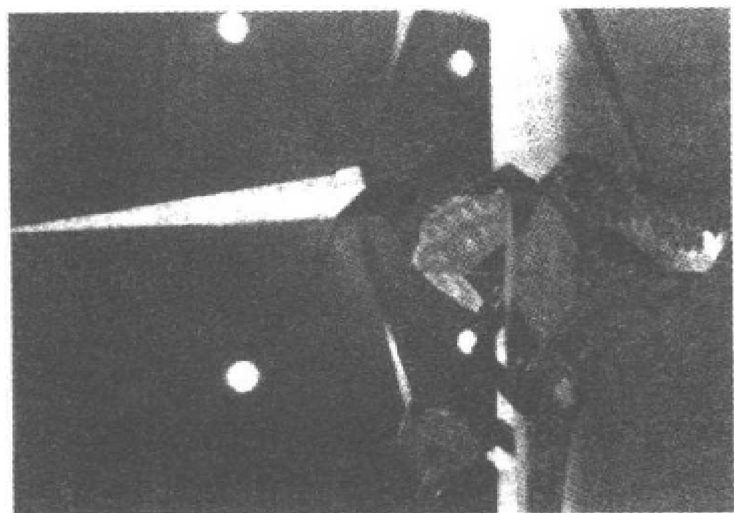
一个正方形变形为一只鸟.

一个正方形变形为一条蛇.

一个正方形变形为一头象.

……

除非你有先见之明,否则你准会以为我们将要谈些有关拓扑①或魔术表演之类的话题了.



在旧金山机场(加利福尼亚)联合航班的候机处的一个类似于折纸的雕塑.

折纸是一种艺术形式,其历史可追溯到公元583年.当佛教的和尚从中国经过朝鲜东渡去日本时,带去了许多纸.由于当时

① 原注:拓扑学是一种特殊类型的几何,它研究物体在伸张或收缩的变形中保持不变的性质.不同于欧几里得几何,拓扑学不与大小、形状以及刚性图形打交道.这就是为什么拓扑学被说成是橡皮膜上的几何的原因.想象物体存在于一个能够伸张和收缩的橡皮膜上,在这样变形的过程中,人们研究那些保持不变的性质.

纸张是很昂贵的，所以人们用时格外小心，而折纸就成了一些礼仪的完整的一部分.折纸的艺术就是从那时起一代代传了下来.

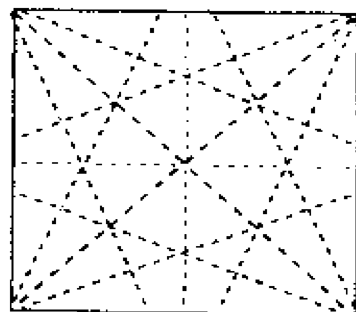
动物、花、船和人都是折纸的创作题材.(折纸一词是源于"折的""游戏".)几个世纪来，人们对折纸的热情有增无减.事实上，今天在英国、比利时、法国、意大利、日本、荷兰、新西兰、秘鲁、西班牙和美国[①]等国家内都有国际折纸协会的区域机构.

在创作折纸图形时，折纸能手是由一张正方形的纸开始的，然后运用他们的想象、技巧和决心，变形为任意的形状.

一个正方形之所以可以选为折纸的初始单元，因为与矩形 [202] 和其他四边形相比，它有四条对称轴；而虽然圆和有些正多边形有更多的对称轴，但它们又缺少正方形所拥有的直角，这就使制作上造成了较大的困难.有时人们也用其他的纸张作为折纸的开始，但纯粹从正方形开始的折纸作品是不用胶水和剪刀的.

折纸的对象被创造出来后，留在正方形纸张上的折痕，揭示出大量几何的对象和性质.

右图所示的折痕是在折一只飞鸟时在正方形纸张上留下的.



在正方形纸张上的折痕表现出以下的数学概念：相似、轴对称、心对称、全等、相似比、比例、以及类似于几何分形结构的迭代(在图案内不断地重复图案).

研究折纸的创作过程是极具启发性的.人们开始用一个正方形(二维物体)的纸张来折一个形体(三维物体).如果折出了新的东西，那么折纸的人就把这个形体摊

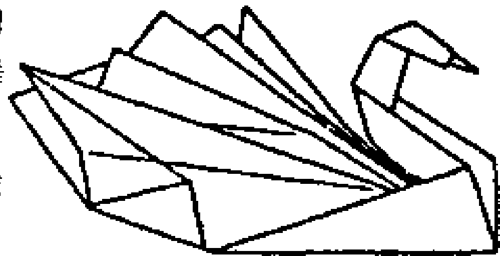
① 原注：美国折纸中心联谊会位于纽约西第77街15号，NY10024.英国折纸协会位于斯托克波特(英格兰西北部城市——译者)柴郡，桑恩路12号，SK71HQ.

开,并研究留在正方形纸上的折痕.这个过程包含了维数的变动.折痕表示物体在扁平面(即正方形)上的二维投影.而一个二维物体到三维物体,又回到二维,这就跟投影几何的领域发生了关系.

《折叠天地》一书的作者P·恩格尔是一位折纸的科学和艺术专家.在他长年的折纸生涯中,有着许多珍贵的发现和创造,恩格尔使折纸达到了一个更高的境界.他强调了在折纸、数学和[203]自然之间强有力的联系,而描画这种联系则类似于极小值问题、分形和混沌理论.

折纸的创作始于有限数量的材料(如一张固定大小的正方形纸)并演进为希望的样式.这里并无任何限制,也不像肥皂泡那样受现实空间的制约.

折纸经历了一场复兴.从早期的折纸发展到今天经历了漫长的道路.今天,专家们用纸折出了复杂的样式确实令人叹为观止.他们不用胶水、不用剪刀,巧妙地变形纸张,而且熟练的程度简直令人难以置信!最终完成的作品远非简单的盒子或花朵,而是造形逼真的动物,栩栩如生的纸的雕塑!诸如乌贼、蜘蛛、蛇、舞女、家具等等.这些创造性的成就,无疑来自长年的工作、丰富的经验和深刻的研究,就像艺术家M·C·埃舍尔献身于镶嵌艺术的发展那样.

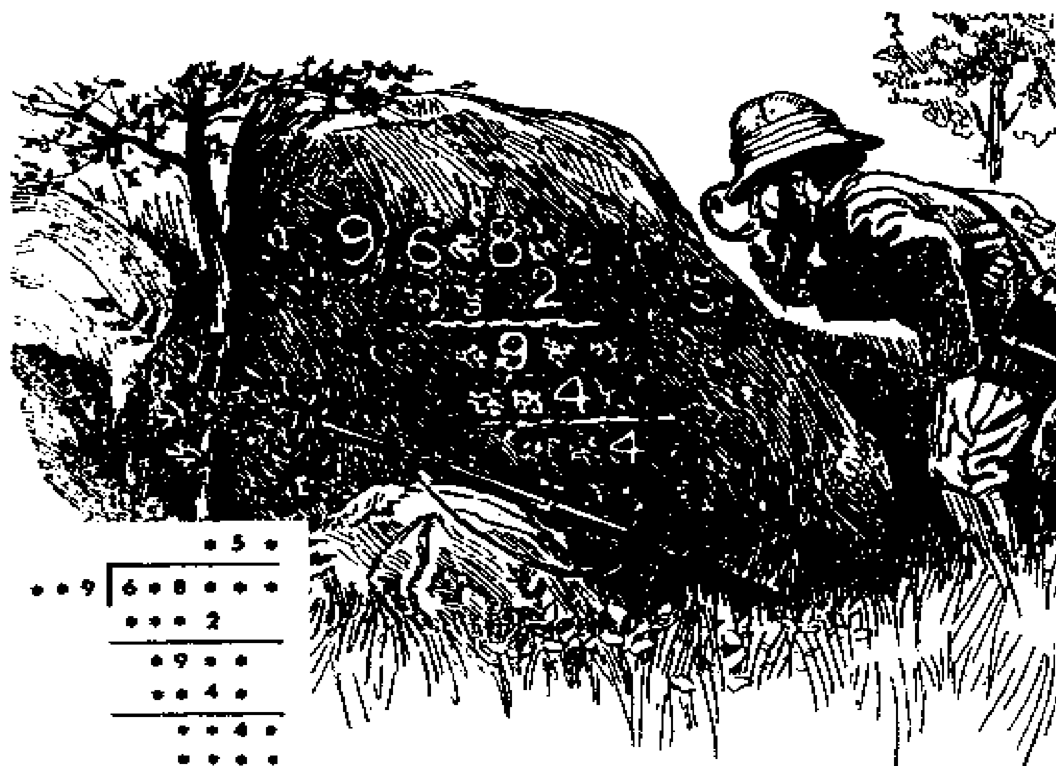


数学寓于折纸之中,不管折纸人的身份如何,对数学的了解[204]总然会在折纸中增加人们的能力和创造力.

# 洛依德的丢失的数字谜题

以下是一个考古发现，这里只留有八个明确的数字，但它对于丢失的数字已经提供了足够的信息.

试问，这些丢失的数字是什么？




丢失的数字——一个谜题.

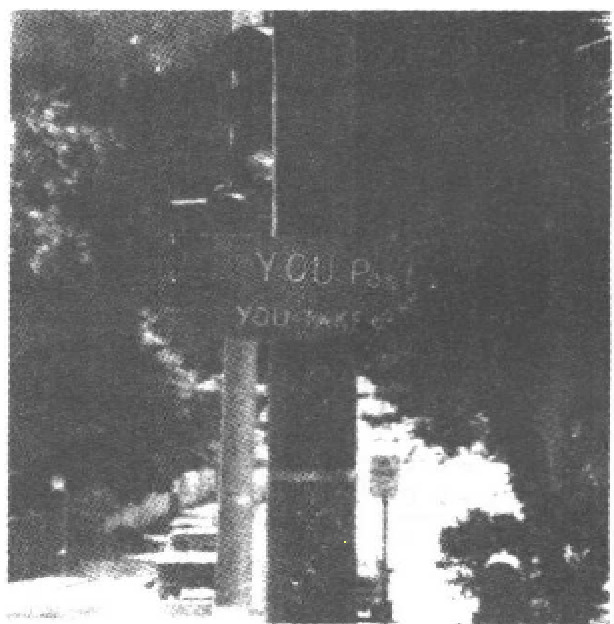
(解答见附录)　　[205]

# 悖　　论

"……古往今来，为数众多的悖论为逻辑思想的发展提供了食粮."

——N·布巴布基

"不要读这一页上的任何东西."悖论就像这句话一样，其陈述或表现出自我矛盾，或造出无意义和令人吃惊的结论，或形成无休止的循环论证. 多少世纪来，悖论不仅使人迷惑，造成了逻辑思维上的混乱，同时也引起了人们的兴趣和不安，悖论出现在广泛的学科范围，包括文学、科学、数学，乃至于我们日常所面对的东西，就像本页照片上那样.



一位被大批车库出售告示所激怒的房主在杆上钉上一块悖论的牌子.(牌上写的是"是你弃上去的,你要把它拿下来!")

不管什么类型的悖论,问题的创造和那令人困惑的推理,两者都充满了趣味和享受. 特别地，数学的悖论已成为发现的王道乐土. 下面我们对一些著名的悖论作一番简要的探索,它们不仅可以供人娱乐而且还是很好的智力练习.

*　　　　*　　　　*

公元前5世纪,芝诺用他关于无限、连续及部分和等知识,

创造了以下著名的悖论:[1]

● 二分法悖论——

一位旅行者步行前往一个特定的地点.他必须先走完一半的距离,然后走剩下距离的一半,然后再走剩下距离的一半,永远有剩下部分的一半要走.因而这位旅行者永远走不到目的地! [206]

● 阿基里斯和乌龟——

在阿基里斯和乌龟之间展开一场比赛.乌龟在阿基里斯前头1000米开始爬,但阿基里斯跑得比乌龟快10倍,比赛开始,当阿基里斯跑了1000米时,乌龟仍然在他前头100米.而当阿基里斯又跑了100米到达乌龟前此到达的地方时,乌龟又向前爬了10米.芝诺争辩说,阿基里斯将会不断地逼近乌龟,但他永远无法赶上它.芝诺的理由正确吗?

下面是古往今来的一些脍炙人口的悖论:

● 欧布利德悖论——

欧布利德是古希腊的哲学家(公元前4世纪).他争辩说:人们决不可能拥有一堆沙.推理如下:一粒沙自然构不成一堆沙,如果在一粒沙上加上一粒沙,它们也构不成一堆沙.如果在不是一堆的沙上加上一粒沙,仍然构不成一堆.因而人们决不会有一堆沙!

此外,欧布利德还以下面的悖论而享誉:"我所说的话都是假的."

● 埃普门尼德悖论——

埃普门尼德是克利特岛的人,他的悖论是一句简单的陈述:"所有克利特岛的人都是说谎者."

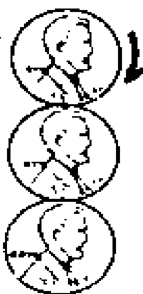
---

[1] 原注:另有一些著名的悖论开列如下,仅供参考——库里的三角形悖论,狄·摩根悖论,欧拉悖论,格里林悖论,无限回归悖论,莱布尼兹悖论,地图悖论,彼得斯堡悖论,普洛塔哥拉斯悖论,纽可布悖论,以及非转移悖论等.

● 亚里士多德轮子悖论——

在轮子上有两个同心圆.如图所示,轮子沿直线从 $A$ 滚动一圈到达 $B$,注意到 $|AB|$ 对应于大圆的周长.由于小圆也滚动了一圈,而走过的距离也是 $|AB|$,难道它的周长也是 $|AB|$ 吗?

● 硬币悖论——



顶上的硬币绕下面的硬币移动半圈,结果其位置竟然跟原先出发时位置一个样(头朝上).由于它所走的路只是周长的一半,人们有理由认为它应该头朝下.你能解释这是怎么一回事吗?

● 代数悖论——

代数悖论为数众多,其中有一些是著名和值得深思的.

(1) 若 $a=b$,则 $1=2$.

**证明:**

$a=b \rightarrow a^2=ab \rightarrow a^2-b^2=ab-b^2 \rightarrow$

[207] $\dfrac{(a^2-b^2)}{(a-b)}=\dfrac{(ab-b^2)}{(a-b)} \rightarrow \dfrac{(a+b)(a-b)}{(a-b)}=\dfrac{b(a-b)}{(a-b)} \rightarrow$

$a+b=b \rightarrow a+a=a \rightarrow 2a=a$,

$\therefore \quad 2=1$ 或 $1=2$.

(2) $1=-1$ 的证明:

$-1=(\sqrt{-1})^2=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}$

$=\sqrt{1}=1$.

● 理发师悖论——

该悖论可追溯到1918年.在一个特殊的村庄里有一位理发师,他只为所有不给自己理发的人理发.试问,理发师自己的头要由谁来理?

● W·克利悖论——

"我们遇到敌人,而他就是我们."

● 奥斯卡·王尔德悖论——

"摆脱诱惑的唯一办法是屈服于诱惑."

● 《堂·吉诃德》中的悖论——

S·朋渣是巴拉塔利亚岛上的统治者.凡进入该岛的人都必须向他陈述他们为什么要进岛.如果他们讲的是真话,将可以获得自由;如果他们讲的是谎话,就要被绞死.一天一个旅行者抵达那里向他陈述道:"我将在这里被绞死."

试问,S·朋渣该怎么办呢?

● 无名氏悖论——

"请不要理睬这个声明!"

● 跟无限有关的悖论——

(1) $x+x^2+x^3+\cdots+x^{n+1}+\cdots=\frac{x}{1-x}$;

$1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}+\cdots=\frac{x}{x-1}$;

$(x+x^2+x^3+\cdots+x^{n+1}+\cdots)+(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}+\cdots)=\frac{x}{1-x}+\frac{x}{x-1}=0$.

上述关系式对于所有的 $x(x\neq1)$都成立.但如果 $x$ 是正数,式子的左边必然大于 0,它又怎么能等于右边呢?

(2) $\{1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}$是自然数集;

$\{1,4,9,16,\cdots,n^2,\cdots\}$是自然数平方的数集.

这两个数集能够很容易构成一一对应.那么,在每个集合中有一样多的元素吗?

● 康托悖论——

康托(Georg Cantor,1845—1918)是集合论之父,他表明一个集合子集的集合,比原集合包含有更多的元素.对于所有的集合这一结论都正确吗?

● 罗素悖论——

罗素(Bertrand Russell,1872—1970)悖论是有关对一个集合的元素资格认识的悖论.

一个集合要么是它自身的一个元素,要么不是它自身的元素.一个集合不包含自身作为元素,我们称之为正规的.例如,人的集合就不包含自身作为元素,因为这个集合不是一个人.反之,如果一个集合包含自身作为元素,我们就称之为非正规的.例如,由多于5个元素的集合所组成的集合就是非正规的.现在的问题是:所有正规集合所组成的集合是正规的呢?还是非正规的?

[208]

如果它是正规的,自然不能包含自身作为元素.但这是所有正规集合的集合,它必须包含全部的正规集合,也就是必须包含这个集合在内,这表明它是非正规的,矛盾.

如果它是非正规的,那么它包含自身作为元素,但根据假定该集合只包含正规集合,又矛盾.

罗素悖论对于德国数学家G·弗里兹来说是一种毁灭性打击.此时他刚刚结束《论算术的逻辑发展》第二卷的写作.在该卷附录的开头他这样写道:"最使一位科学家伤心的是在他工作即将完成之际却发现基础崩溃了.罗素的一封信把我推上了这样一种境地."

悖论还在不断地被有意或无意创造出来,上面举的只是大量现有悖论中的少数几个.

在我们每天的活动中,或在创造和界定数学体系和概念的过程中,悖论既是一个难以应付的对手,又是一种学习的工具.数学的发展体现在方法的多样化上.数学家对一个问题上的探索可能导致一种新的方法的发现,或新的数学体系的创造(如非欧几何的发现).数学家还能够用数学去描述和解析现实世界的某些东西或现象,并设计出一些新的想法(如分形及混沌理论).在这样的过程中,悖论有意或无意地出现了!概括而没有证明,除以0,假定某些东西存在而无证实,不依附于定义,等等.而正是这些,创造出了令人惊异的悖论.

[209]

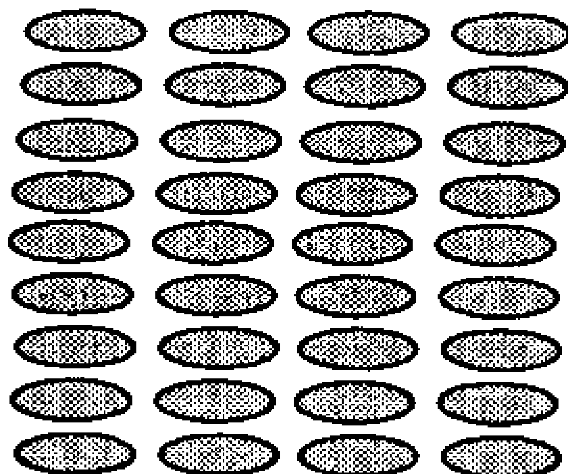
# "尼姆比"游戏

"尼姆比"游戏是丹麦科学家P·海因在古代"尼姆"游戏[①]的基础上改造发展而来的.

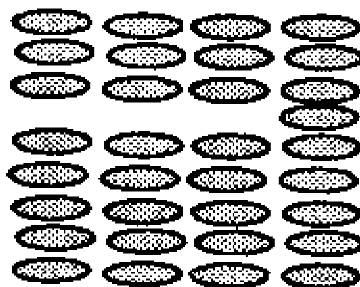
"尼姆比"游戏几乎可以在任何地方玩.全部的需要就是一些小石头或河卵石.

**程序:**

● 放尽可能多的石头排成你所希望的正方形或矩形阵列.如下图,用36个石子组成4×9阵列.



● 每个选手可以从任意的行或列拿走他所希望拿走的尽可能多的邻接在一起的石子.例如,第一个选手可以决定从第4行拿走头3个石子,留下:



① 译者注:"尼姆"游戏也称中国二人游戏(Chinese Game of Nim).该游戏源于中国,后来传入欧洲.有兴趣读者可参阅译者所著的《否定中的肯定》一书,上海科学普及出版社,1989年.

第二个选手不能从第1,2或3列拿走全部的石头,因为这些列都有石头缺了(即不全部连在一起).但第二个选手可以拿走第4列的全部石头,因为这一列石头没有差缺.第二个选手也可以从其他的行或列拿走他希望拿走的尽可能多的邻接在一起的石子.

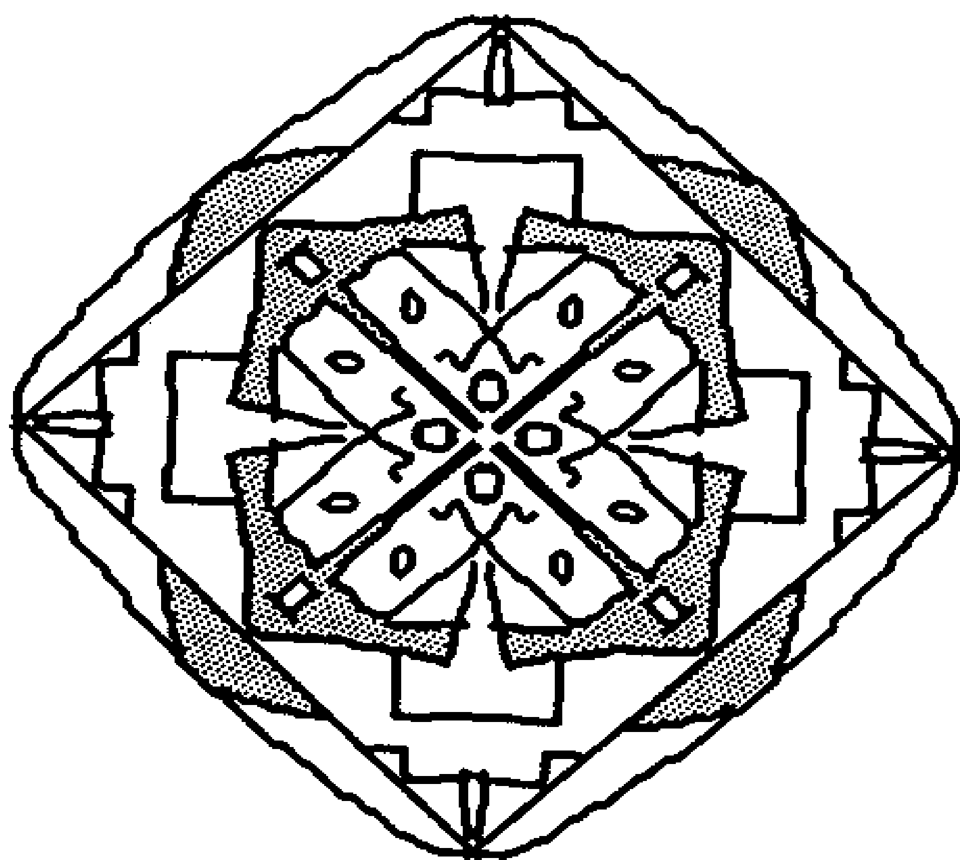
● 选手轮流拿石头,不能不拿.

**游戏的目标:**

[210] 谁拿到最后一块石头就算谁输!

# 万花镜与对称

苏格兰物理学家戴维·布留斯特在19世纪初发明了万花镜.此后,万花镜广为流行,深得人爱.在万花镜的像中,人们可以看到它有许多对称的轴线.



一条对称轴准确地把物体分为两半,当沿着这条线折叠时,这两半精确地相合.今天,高级的计算机程序允许使用者用计算机产生精确的镜像,描绘像上图那样的图象.

[211]

## 7,11,13 的奇异特性

取任意三个数字形成一个整数：$\overline{abc}$，重复它的数字写出一个新数：$\overline{abcabc}$，任一用这种方法形成的数，将被 7，11，13，77，91，143 和 1001 整除！这是怎么回事呢？

762

762,762

762,762÷7=108,966
762,762÷11=69,342
762,762÷13=58,674
762,762÷77=9906
762,762÷91=8382
762,762÷143=5334
762,762÷1001=762



(解释见附录)

# 克莱因瓶的纸的模型

克莱因(Christian Felix Klein,1849—1928)是一位德国数学家.他设计了一种拓扑学的克莱因瓶.这种瓶只有一个面,而且它穿过自身.如果水灌进去,那么水会从同一个洞流出来.



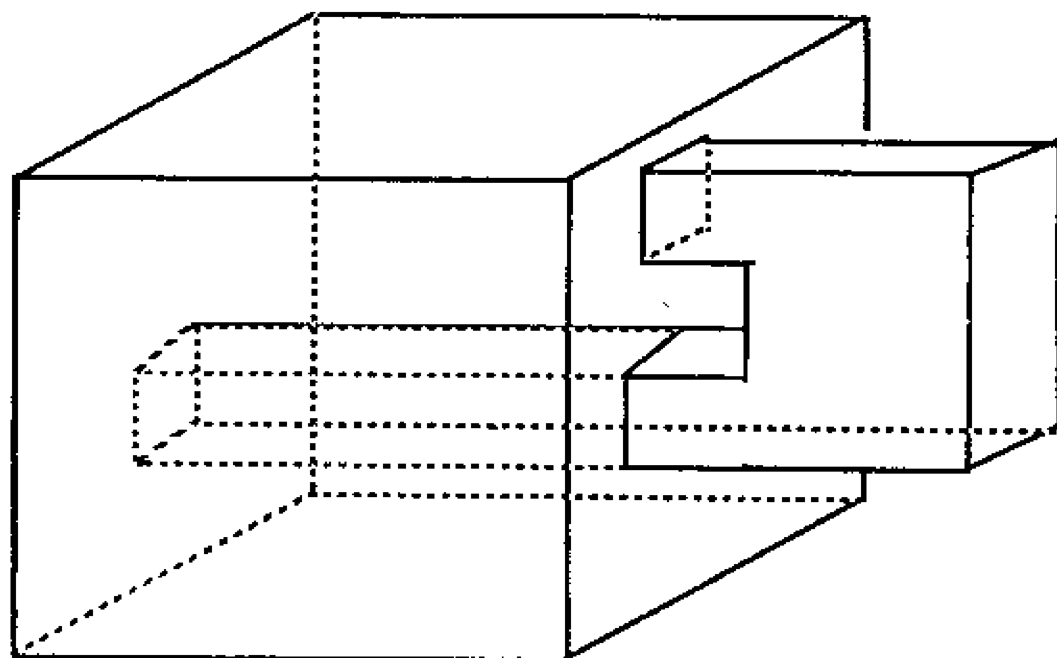
莫比乌斯所创造的莫比乌斯带.



克莱因瓶

在克莱因瓶与莫比乌斯带之间有着有趣的联系.如果将克莱因瓶沿着它长度方向切成两半,将会形成两个莫比乌斯带.

下面是一个类似于克莱因瓶的模型,它只有一个面(单面)试将这个模型剪成两半,并观察它所生成的两个莫比乌斯带.



## 数学问题与发现

纵观数学发展的进程，问题在数学思想的发展和发现中起着催化剂的作用．事实上，数学的历史可以看成是研究问题的足迹．千百年来，数学家们力图去解决这些问题．然而到了问题真正获得解决的时候，却反而感到有些沮丧．因为它已不再成为人们为之奋斗的，令人兴奋和富有挑战的数学思想．

一些最令人振奋的数学发现，总是由于数学家们努力解决"未解决"的数学问题，或试图对一些数学思想加以证明或反证时创造或产生的．古代三大作图问题可算是最早的一些挑战性的数学问题，它导致了许多新的发现，诸如：

- 为解三分角问题的尼科梅德斯蚌线．
- 为了找到$\frac{1}{2}$的立方根，戴奥克拉斯的方法中所用的蔓叶线．
- 柏拉图的倍立方器．
- 欧多克斯的杖头线．
- 埃拉托斯散的滑动正方形．
- 在给定一对线段之间插入两个几何平均值的，阿波罗尼斯解倍立方问题的方法．
- 梅纳科斯解倍立方问题的抛物线方法．
- 塞斯汀用一条双曲线和一条抛物线解倍立方问题的方法．
- 对于解化圆为方问题的希波克拉底弓形．
- 对于解化圆为方问题的喜庇亚斯割圆曲线．
- 阿基米德对于三分角的设计．
- 解三分角问题的帕斯卡蚶线．
- 解三分角问题的折磬形．

- 解三分角问题的阿基米德螺线.
- 解三分角问题的螺旋线.
- 用一个圆和一条双曲线解三分角问题的帕普斯方法. [214]

上述的表尚可继续.

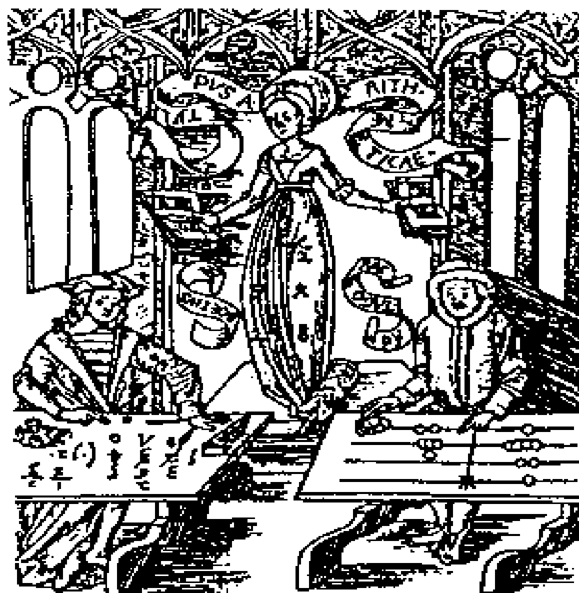
两千多年来，数学家们为证明欧几里得的第五公设进行了不懈的努力，终于在 19 世纪发现并创造了非欧几何. 对哥尼斯堡七桥问题的欧拉解答（1736）引发了对拓扑学的研究. 四色地图问题（由英国数学家格里斯于 1852 年正式提出）一个多世纪来曾经多次被“证明”，但事实表明这些“证明”都存在着毛病. 有趣的是，这个问题并没有因而沉寂，而是随着拓扑学的发展而发展. 教师们在课堂上用它逗起学生的兴趣，而数学家则花费大量的时间去试图解决它. 四色地图问题终于在 1976 年由伊利诺斯大学的 K·阿佩尔和 W·哈肯用一台计算机解决了.

近些年来，对一些艰难的数学问题和猜想，找到了一些令人振奋的证明：

——莫德尔猜想

1922 年，莫德尔提出：对一定类型的多项式方程，只有有限数目的有理解（这些曲线与有两个或更多洞的拓扑曲面结合）. 这个猜想于 1983 年为德国青年数学家 G·法尔廷斯所证.

——庞加莱四维空间猜想



G·雷斯茨的木刻（1503）《算盘与现代十进算法间的比赛》. 图中的背景是算术女神.

该猜想令数学家们困惑了80多年，直至南加利福尼亚大[215]学的M·弗里曼及牛津大学的S·唐纳笛逊完成了该项工作.

一个近代最为著名的数学悬案是费尔马大定理[①]. 费尔马(Pierre de Fermat，1601—1665)是一个职业律师，他把自己的休闲时间都花在研究数学上. 费尔马是当时倍受敬重的法国伟大的数学家之一，在许多领域尤其数论方面多有贡献. 虽然他所写的数学东西很少出版，但他常与那时居主导地位的数学家通信，而且毫无疑问地对他们的工作产生了影响. 他留下了三千张的稿纸、信札以及他对译本《丢番图算术》的注释. 在后者上面人们发现了著名的费尔马注解，那是费尔马写在眉页上的一段话——

> 将一个正整数的立方表为两个正整数的立方和；将一个正整数的四次方幂表为两个正整数四次方幂的和；或者一般地，将一个正整数高于二次的幂表为两个正整数同次幂的和，这是不可能的. 对此，我确信已经找到了令人惊异的证明，但书页的边幅太窄了，无法把它写下.

**重新陈述：**

如果 $n$ 是大于2的自然数，则没有正整数 $a$，$b$，$c$ 会满足 $a^n + b^n = c^n$.

自然，当人们发现这个注释时费尔马已经去世. 但这个注释却向数学家们提出了挑战. 几个世纪来，就连最杰出的数学家都既无法证明也无法否定这个问题的结论. 人们总感到费尔

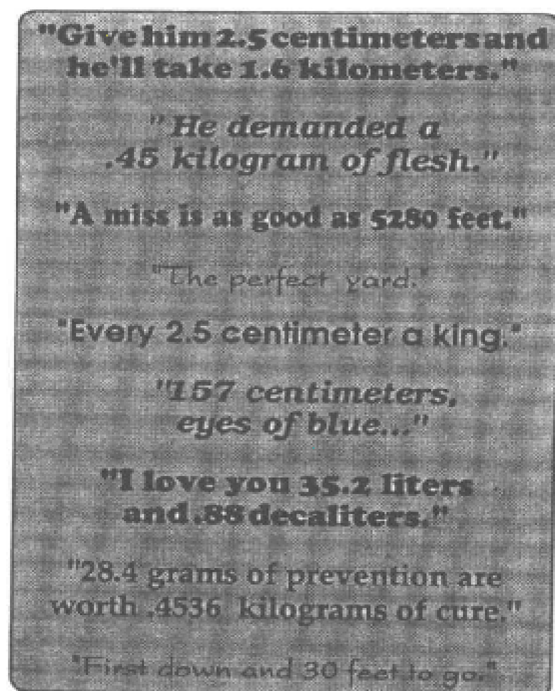
---

① 译者注：该问题已被英国数学家A·怀尔士所解决. 1997年6月德国哥廷根大学决定将为此而设置的十万金马克(约二百万美元)的奖项授予他. 请参见本书第178页.

马是为了挫败他同事的锐气而故意这样写的，他本人绝对没有给出证明！不过，从那时起的 350 年间，这个问题激发了众多的重要数学思想的发现. [216]

# 不同计量单位老的说法

你能把下面所说的改为它们当初的计量说法吗①?




[217] (改变的方法见附录解答)

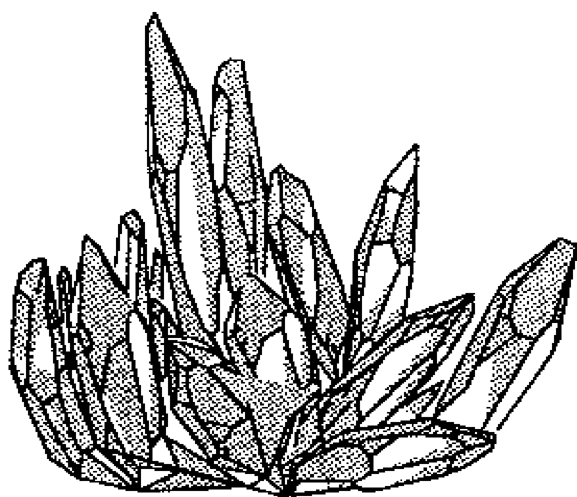
① 译者注:本页主要要求不同单位的换算,文中原来多是成语,改成新计量单位后直译则失去了原意.如上文第一条是成语"得寸进尺",英语中为"Give him an inch and he'll take a mile",直译为"给他一英寸而他却要一英里".然而文中却将一英寸和一英里分别改为2.5厘米和1.6千米,即"Give him 2.5 centimeters and he'll take 1.6 kilometers",如按此照译或保留成语都很难体现作者的目的.所以我们将全部原文保留,而将改成当初计量单位后相应的成语或说法加在附录的解答中,供读者研究和对照.

为方便读者,兹将文中出现的各单位下的计量依次开列如下:

(1) 2.5厘米,1.6千米;(2) 0.45千克;(3) 5280英尺;(4) 码;(5) 2.5厘米;(6) 157厘米;(7) 35.2公升,0.88公斗;(8) 28.4克,0.4536千克;(9) 30英尺.

# 数学与晶体

虽然晶体似乎已经成了新时代众人注目的中心,然而晶体在治疗和增进人体活力方面的应用,则可追溯到数千年前. 今天我们发现晶体存在于许多物体之中,这些物体与我们日常的生活联系在一起. 像杯子、玻璃、汤匙、收音机、钟,甚至我们自己的头发.

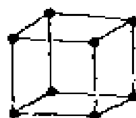


晶体"能力"的秘密在于对它的结构和生长的了解. 应用现代的技术可以发现和开发晶体多方面的应用. 晶体的元素有着整齐的排列. 它们的结构在工艺上是如此地严谨、绝对和同一,以致于数学可以成为分析它们的最完美的工具.

多面体、对称、镶嵌、二面角、几何、投影、正弦函数等等,这还只是用于分析晶体的少数几个数学概念. 只要看一看晶体的结构和用途,这些概念也就变得很明确了!

每一个晶体都可以由其内部原子的构成显示出来,这些原子出现在六个可能的单位晶格或构形砖块上. 这些构形砖块是多面体(一种面是多边形的立体). 晶体多面体有:

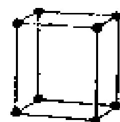
1) 等轴晶系或立方晶系——



每个构形的单位是全等的立方体. 该多面体的面是全等的正方形. 任何三条交会在一起的棱彼此相交成直角. 例如:黄铁矿(天然的二硫化铁——译者)、明矾、石榴石、方铅矿等.

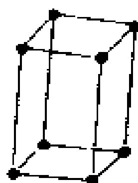
2) 正方晶系——

[218] 多面体单位的面是矩形，在它上面任何三条交会在一起的棱彼此交成直角，且3条中有2条相等. 例如：锡石、金红石等.



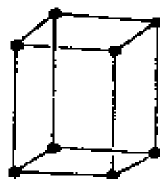
3) 正交晶系——

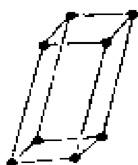
三条交会在一起的棱彼此交成直角，且没有一条相等. 例如：黄玉、天青石、辉铜矿等.



4) 单斜晶系——

三条交会的棱中有两组彼此交成直角，且没有相等. 例如：硼砂、蓝铜矿、白云母等.

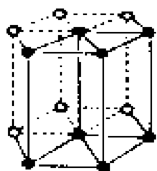




5) 三斜晶系——

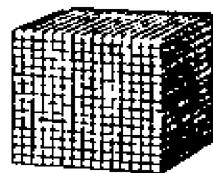
交会的棱中没有交成直角，也没有相等的. 这样的晶体不多.

6) 六角晶系——

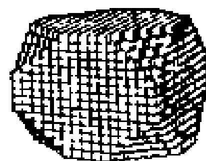


交会的棱中有2个相等，且彼此交成60°或120°角. 第三条与其他两条棱交成直角，且不与它们等长. 例如：方解石、电石、绿柱玉等.

以上六个晶系是所有晶体的构形砖块. 让我们看一看一个等轴晶系的结晶构造，了解一下不同的晶体是怎样从同一的构形砖块形成. 结晶的过程能够像三维形式的镶嵌那样加以考虑. 等轴晶系的结晶是从一个专门的立方体开始的，然后产生数以千计的复制体，它们堆置在一起最终形成右图所示的形式.



但并非所有的等轴晶体最后都像上面那样. 如果我们另一方面又从各个角拿走一定的数量，换句话说我们削去立方体的角，那么我们得到的是图示又一种形状的晶体.

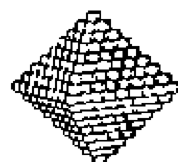


削角的立方体

如果我们继续拿去构形砖块，最终会得到一[219]个八面体形状的晶体.

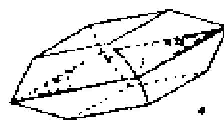
这些都是等轴晶体的例子，其基本的构形单

位是立方体.六个晶系的每一个都有成千上万种不同类型的晶体,这些晶体的型式依赖于拿走或增添些什么,以及什么类型的原子含于单位晶格中(例如,一粒盐中平均含有 $5.6\times10^{18}$单位晶格).



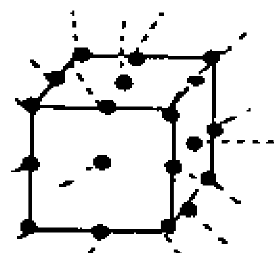
八面体晶体

除了对晶体分类使其与六种多面体构形砖块一致外,分析它们的对称性具有同等的重要性.晶体有单一的对称、不对称或它们联合(即心对称、轴对称、平面对称)等类型.



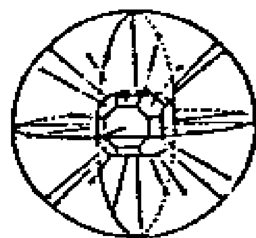
平面对称的例子

有不同的方法可以确定晶体的对称.用精密的仪器可以测定两个面之间的夹角(二面角),并借此判定对称性及确定一个晶体属于六种晶系中的哪一种.每个晶体都有一个特殊的数和对称形式.例如,等轴晶系有 9 个对称面,一个对称心和 13 条对称轴.而对于三斜晶系,则没有一条对称轴.另一种判定晶体的手段是研究 $X$ 射线通过它时所形成的几何图案,或者研究环绕一个特殊晶体的球面上的线投影(投影线垂直于晶体的面).



一个立方体的13 条对称轴.

19 世纪末,人们发现当在石英晶体上加压时会产生充电现象.相反地,当电流通过石英晶体时,石英晶体会通过一致的振动来调控电流的流量.换句话说,石英晶体在两个方面工作,一是当加压时创生电流,二是用以调控电流.这两方面的性质称为压电效应.



一种球面的投影

[220]

有关石英晶体的结构及其性质的知识是拓展其能力的基础.石英晶体要么通过采矿并切成精确的规格,要么像今天我们做的由人工生成.精密是绝对重要的,不然的话一个有着不准确频率的晶体,便要造成破坏性的结果.例如:(1)无线广播电台的信号将在不正确的频率上选择.(2) 不正确频

率的石英晶体将严重干扰计算机上信息的操纵.

我们的有关晶体和它用途的知识依然处于发展和发现阶段.下面列了一部分石英晶体在现在和将来的应用:

● 钟表、计算机、录像机、洗衣机、无人操纵炉、微波炉、洗碗碟机、新的汽车发动机.

● 转换声波为电信号——声纳.

● 检测无线电频率.

**将来可能的应用**

● 临近地震时的警戒设计;建筑物或桥梁不均衡时把振动转换为电信号.

● 转换海洋波浪的运动为可用的能.

● 对于个人的声音和笔迹识别的设计.

探索的远焦点都在石英晶体上,对晶体其他性质的研究和发现还在进行.数学将是对于探索及对这些令人兴奋的矿物增进了解的有价值的工具.[221]

# 中　国　的<br>条　形　数　字

我们中的许多人对记录数字的许多方法都很熟悉，如印加的结绳文字，古埃及人的符号𓏺和𓎆，古巴比伦人的𒁹和𒌋，希腊人的字母等等．然而，机巧的中国人的条形数字却很少人知道．

中国人数字的头几个是这样的——



这些数字出现在诸如占卜用的骨头或乌龟壳上①，时间大约是公元前14世纪的商朝．从这些符号开始，中国人演化成两种书写数字的方法，两种都是十进制的位置值系统．

其中一种方法用于表示数词．例如：

一　二　三　四　五　六　七　八　九

自然，这些中国字的数有着不同的风格和形式，因而常用于正式或非正式的文件上．

另一种方法主要用在数的计算上，我们称之为“条形数字”．在公元前2世纪到公元2世纪之间，条形数字形成了一种令人眼花缭乱的计算方法．最初一些枝条或竹条被用来组成数．后来，专门设计了放置这些算筹条的计算盘，空的地方则表示该位置值单位空缺．

有两套用条子来表示从1到9数字的方法，如下：　[222]

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 第1套 | 𝍠 | 𝍡 | 𝍢 | 𝍣 | 𝍤 | 𝍥 | 𝍦 | 𝍧 | 𝍨 |
| 第2套 | 𝍩 | 𝍪 | 𝍫 | 𝍬 | 𝍭 | 𝍮 | 𝍯 | 𝍰 | 𝍱 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

用两套方法表示是为了避免把12这样的数错写为3．如果

① 原注：这种说法起源于“洛书”的出现在龟背壳上数字的传说．

只用一套数字，那么表示 12 的数便很容易与表示 3 的数混淆——12 为| ||而 3 为|||. 中国人采用混合起来的办法，即交替使用第一套和第二套. 形成了这样一种惯例，即在 10 的奇数次方幂值的位置上用第 2 套，而在 10 的偶数次方幂($10^0, 10^2, 10^4$,……)值的位置上用第一套. 这样 12 写出来就是|＝. 2816 则写为以下的形式.

以下数则分别写为：

4　　31　　132　　5682

为了指示像 205 这样零的位置持有者，就在该位置上留下一个空位. 大概是为了保持筹条不致于挪乱或滚动，所以后来发展了计算盘. 计算盘细分为许多小格，它用来放置表示某特定数[223]的筹条. 这些盘上的小格除了放筹条之外还承担了零位置持有者的功能. 用计算盘计算有点像近代的手摇计算机.

计算盘上所示的数从上到下依次为 6537；28301；67714 和 76620. 中国人还用计算盘建立方程组. 这里顶上一行也可以表示方程：

$$6w+5x+3y+7z=0.$$

最后，条形数演化为他们的书写形式. 但由于缺少一个零的符号，引起了一些书写上的混乱. 起初，当写一个像 207 这样的需要零位置持有者的数，则要么写成具有古典特征的形式：

二百七
207

(其实作者提供的上图那样的写法也不正确,这是由于作者对汉文字不熟悉的缘故.正确的写法应是“二百零七”或“二百另七”——译者),要么像在计算盘上那样画一个空格来表示.

| 2 | 7 | 0 | 4 |
| --- | --- | --- | --- |
| $10^3$ | $10^2$ | $10^1$ | 1 |

到了公元 8 世纪,采用符号〇作为零①.中国人把这个符号既作为零位置的持有者,也作为小数点的标志.而随着十进小数的引入,中国的计算和算术方法呈现一派繁荣.

中国人的数字系统的演化是独立于其他文化的.从开始起它便采用十进制位置值系统.

〇〇|||⊥

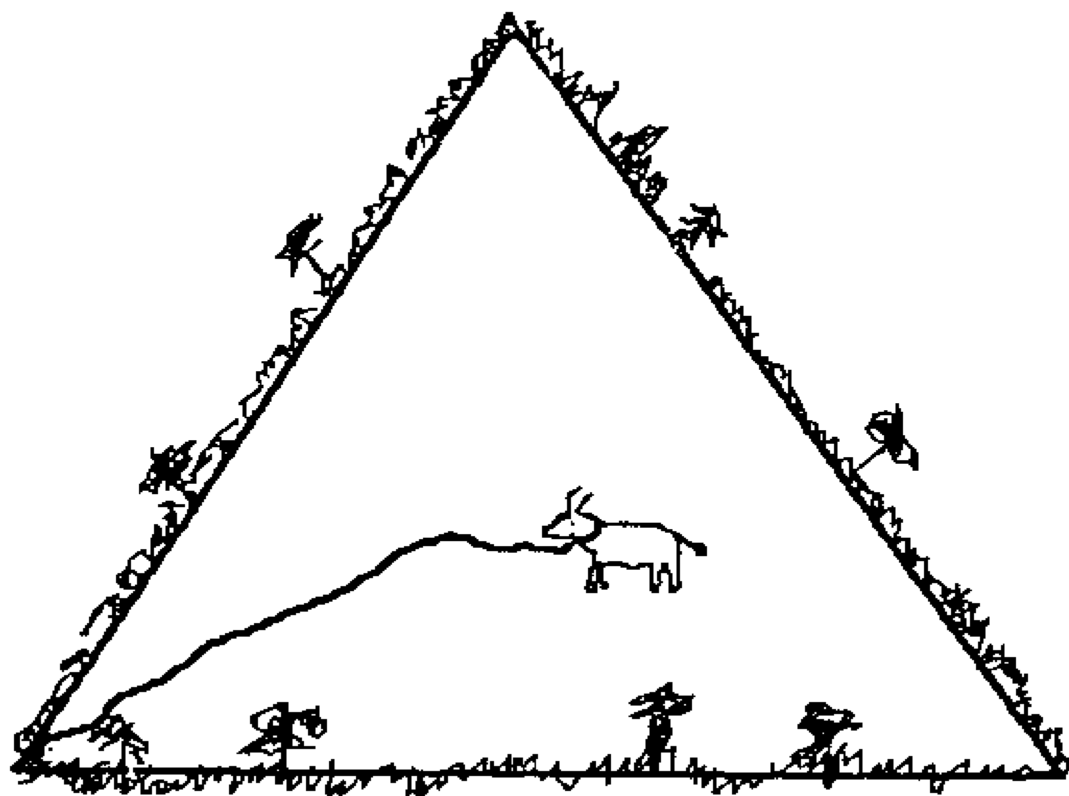
这是小数 0.036 的写法.第一个〇表示小数.

[224]

① 原注:许多人相信,这是此间中国人与印度数学家接触的结果.

## 用绳拴羊的谜题

一只羊被圈在一块面积为 $2\pi$ 英亩，形状为等边三角形，周围由篱笆砌起的草地上，而且用绳子把它拴在三角形顶点的柱子上．试确定这条拴羊的绳子要多长(取最接近的整英尺)，才能使羊能够吃掉这 $2\pi$ 英亩地上一半的草？①

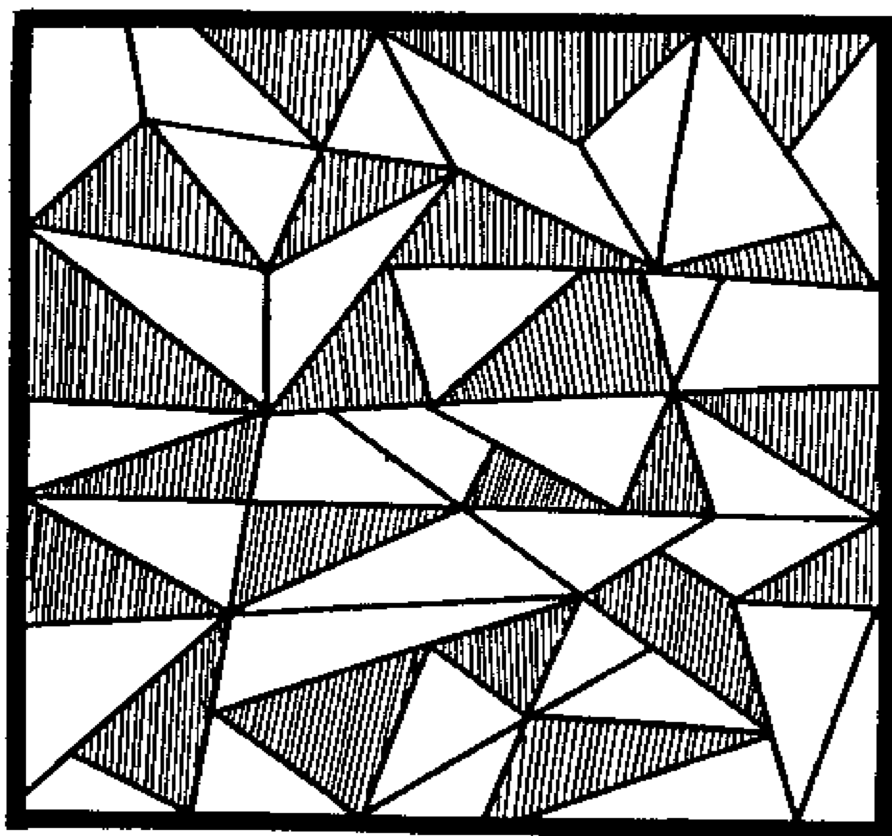


[225] (解答见附录)

① 原注：该谜题由著名英国谜题专家 H·杜登尼(Henry Dudeney, 1847—1930)的一道题改编．

## 洛依德的隐蔽五角星谜题

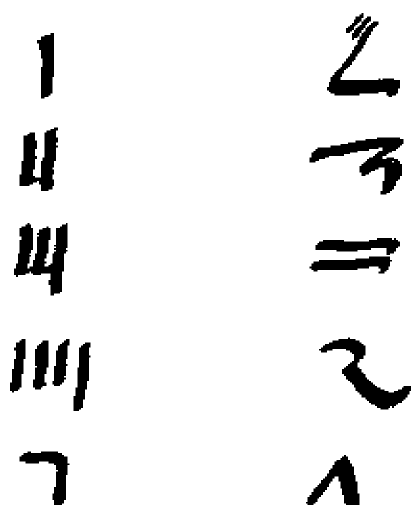
山姆·洛依德是美国最伟大和最著名的谜题专家之一.他的发迹始于他的少年时代,那时他赢得了一次对棋类问题的悬赏. 16岁那年,他成了《棋类月刊》问题专栏的编辑.此后几年,他还为包括《科学美国人增刊》在内的许多报纸和杂志编辑其他的栏



请找出隐蔽的五角星.

目.但最为著名的还是他那机巧的谜题、游戏及新奇的发明.其中包括他的《巧驴,14－15谜题》(一种幻灯片,它一直流行至今),改编的《骰子游戏》,以及那著名的《离开地球》谜题.隐蔽的五角星谜题引自他的书《百科辞典》,该书是他死后由他儿子完成的.

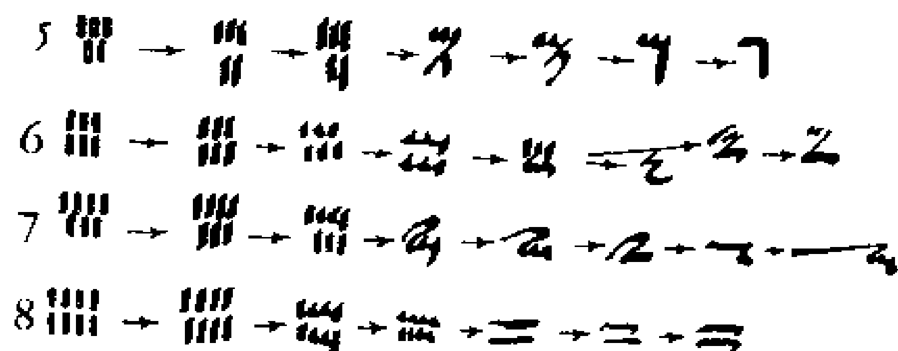
## 埃及的僧侣数字



从1到10的僧侣数字

古埃及人用他们的象形文字及数字刻写他们的界石、建筑物或石碑.当时的作家在芦苇或纸草上书写.为了节约时间以便写得更快和更有效率,逐渐地对象形文字和数字加以改造,使其简单化.这就形成了当时僧侣们所用的形式.埃及作家们对象形文字和记数法的改造,被僧侣们用来记帐或计算,而这些一般都记录并保存了下来.最后,原先的象形文字则仅仅用于装饰的目的.

从公元前第三个一千年到第一个一千年,僧侣们的书写法用于所有的工作领域,诸如科学、法律、管理、宗教和文学.在公元前12世纪,僧侣们的书写法逐渐被一种称为通俗的草书所替代.




上图所示的是一些象形数字所经历的变化.

[227]

# 日 历 与 时 间 测 量

日历是宇宙巨大的钟.我们用以保持时间间隔痕迹的方法,需要具有很高的精确性.多少世纪以来,人们对时间的测量不断加以修订,其精确性不断得到改善.从日晷仪到水钟,到摆钟,到发条钟,一直到今天的石英钟.虽然在计时方面我们在不断进步,但日历的改善和进展,却在1582年格里高里历出现后基本上陷于停滞的状态.



这是公元前800年至公元200年间在秘鲁流行的用黄金打成的日历.

**历史:**

最早的日历应归功于米索不达美亚的居住者,早期的秀默人(古代幼发拉底河下游的一个民族——译者)和古巴比伦人.

在公元前14世纪,中国人确定了一年为$365\frac{1}{4}$天,而一个阴历月为$29\frac{1}{2}$天.公元前13世纪,海希奥德和荷马建立了希腊[228]人使用的月亮历(即阴历).但迟至10世纪才有了希伯莱人的月亮历及印度的月亮——太阳历.但那个时期玛雅人的日历最为先进.该日历包含有多种天体运转的进程.诸如一天(地球自转24小时)、月亮(阴历)月、太阳年(其时间的长度等于地球绕太阳旋转一周)及其他天体如金星等运转的状况.

在地球的不同区域,日历还反映出季节——埃及的日历有三个季节,巴比伦日历有两个季节,而希腊的日历有四个季节.

今天,格里高里历普遍用于西方世界及商务往来上.但我们依然发现在使用着的其他日历,如希伯莱日历、伊斯兰日历、印度日历、中国日历、巴厘日历、新几内亚日历等.这些日历是出于该地区人们在生产、文化和宗教上的特殊需要.

在采用格里高里历之前,朱里安(君士坦丁大帝之侄,后为罗马皇帝——译者)历曾经用过一时.该历每128年更换一次.

太阳年的准确时间为365天5小时48分46秒,或者365.24219074164天.格里高里历设置每年为365.2425天.每四年设一闰(除去不被400整除的世纪年,如1700,1800,1900等).经过这样的修订后每年大约还差$\frac{1}{4}$分钟.这意味着每3323年需要增加一天.这比起朱里安历可算是有了一定改善.但仍有不尽完美的地方.公元1930年,世界日历协会开发了一种非常系统化的日历,该日历甚至于提交给联合国讨论过.但在可预见的未来,现有的日历不会改变.

一种完美的日历能够按我们现今所用的时间单位(秒、分、[229]时、日、周、月)来设计吗?或许需要设计一个新的单位,例如用$\pi$弧度作为时间长度的单位,一年中有六$\pi$个月等等?或许需要设计出其他的能够与各种时间测量同步的单位?

或许我们需要扩展我们的日历,不是用地球的时间来测算,而是用宇宙间的关系来替代.空间的探索正拓展着我们的世界,但无论哪一种新的日历,无疑都需要适应我们现有生活的样子.似乎大部人对我们现今通用的日历都感到满意,而不想去改变它!

**JANUARY**

| S | M | T | W | T | F | S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| 29 | 30 | 31 | | | | |

**FEBRUARY**

| S | M | T | W | T | F | S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | | |

**MARCH**

| S | M | T | W | T | F | S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |

**APRIL**

| S | M | T | W | T | F | S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| 29 | 30 | 31 | | | | |

**MAY**

| S | M | T | W | T | F | S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | | |

**JUNE**

| S | M | T | W | T | F | S | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 2 | |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | |
| 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | W |

**JULY**

| S | M | T | W | T | F | S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| 29 | 30 | 31 | | | | |

**AUGUST**

| S | M | T | W | T | F | S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | | |

**SEPTEMBER**

| S | M | T | W | T | F | S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |

**OCTOBER**

| S | M | T | W | T | F | S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| 29 | 30 | 31 | | | | |

**NOVEMBER**

| S | M | T | W | T | F | S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | | |

**DECEMBER**

| S | M | T | W | T | F | S | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 2 | |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | |
| 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | W |

“世界日”日历,每一列的月份总从同一个星期儿开始.每年除复活节以外的所有节日各自的星期儿都是一样的.其设置方法是:在十二月和一月之间放一个“世界日”;如为闰年,则在六月和七月之间再放一个“世界日”(另一个世界日).

[230]

## 变化的"一天"

美国海军天文台的麦卡锡博士报告说:1990年1月24日这一地球天长了万分之五秒.这一地球转动速度的变化是通过



对恒星及行星的测量算出的.来自亚洲横跨太平洋的西向风暴引起了这种变化.地球的转动可能受其表面气候的影响(通过风力)而不断地改变.在1982年—1983年期间,地球慢了万分之

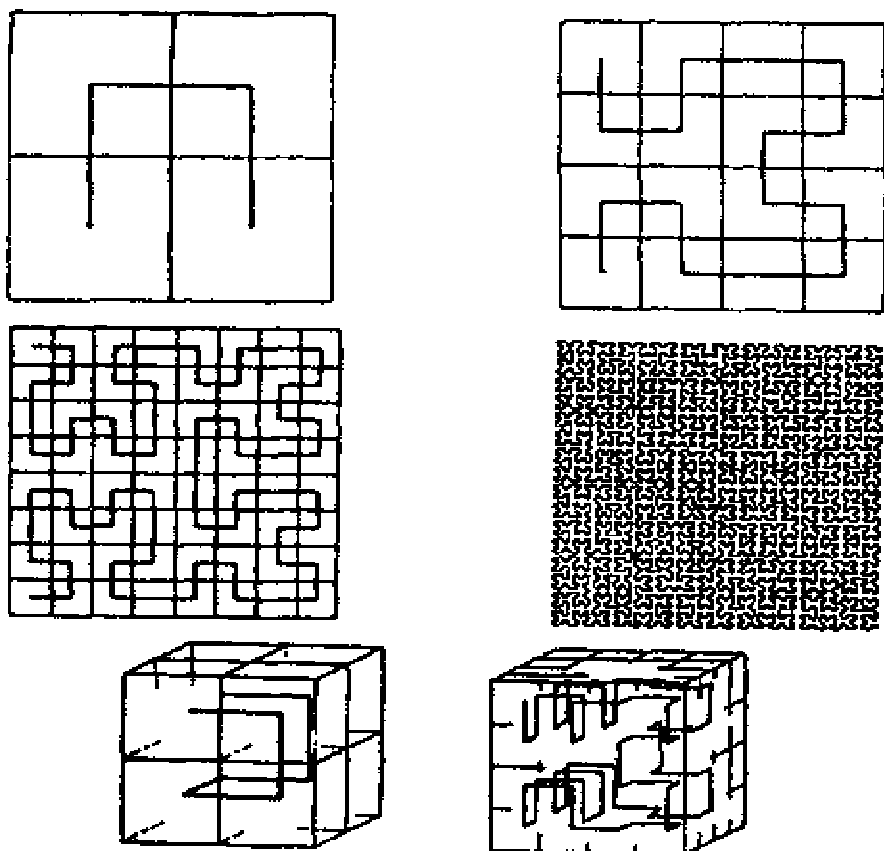
二秒.这是因为1982年—1983年的厄尔尼诺现象[①],引起了海水温度和空气压力的变化,从而对全球的气候状况产生了影响.可以说厄尔尼诺现象是过去100年间发生的最为频繁的一种大范围的气候现象. [231]

① 原注:厄尔尼诺是太平洋赤道暖流,它与"南向振动"相联系.所谓"南向振动"是一种太平洋气候系统大范围的周期性变化.

## 空间充满曲线与人口

在一个空间里充满曲线是指,对于三维空间或给定区域内的每一个点,随着曲线描画的进程,周围的空间逐渐变黑.空间充满曲线的方式,其扩展与生成,都似乎类似于人口的增长.

充满空间的皮亚诺曲线,表现了该曲线在给定的空间或区域内是怎样的生成,又怎样的自我扩展.一个城市的人口或者更一般地世界的人口,在不断地增长着,但却限制在一个固定的疆域内.因此,我们可以利用有效的资料,通过分形、充满空间的曲线或计算机来规划不同区域人口的密度.

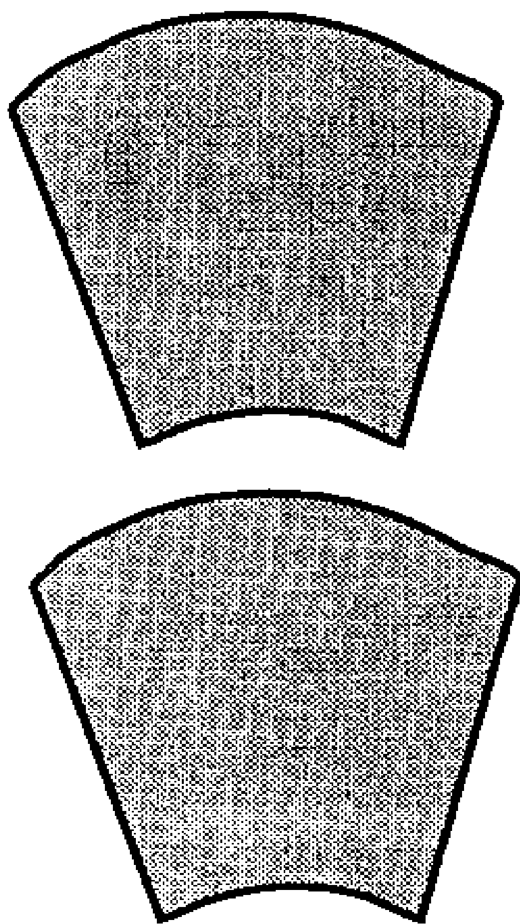


上例显示了空间充满曲线的阶段.如图所示,该曲线通过特殊的方式不断地自我生成,并逐渐包裹了整个立方体空间.

# 会聚性或发散性视幻觉

在数学中我们绝不能只相信眼睛的测定.这并不是因为我们敏锐的视力出了什么毛病,而是由于我们眼睛的生理构造所造成的限制.感觉蒙骗了我们!

如下图,顶上一个图形看起来显得小些.假如把它剪下来放到底部图形的下面,现在再去看它又会显得大一些.这种错觉称为会聚性或发散性视幻觉.这种幻觉是由角和弓形造成的,它导致我们的眼睛向内或者向外,使得物体看起来缩短或伸长了.艺术家、建筑师和服装设计师们都体会到这种幻觉的力量,并在他们各自的工作中细心加以考虑.



## $e$ 和银行业

$e$ 跟我们日常的事情有什么关系呢？事实上它在我们日常生活中用的跟任何一个特定的整数一样多，尽管人们并不总能察觉到它的出现．只有很少的人知道 $e$ 是一个实际的数，如果问大家，可能多数人会说 $e$ 是英语字母表里的第 5 个字母．有些人知道它是一个奇怪的数，这是他们通过数学课了解到的．只有少数人知道它是一个无理数和一个超越数．

2.71828182845904
52353602874713
52662497757247
09369995............

在今天的银行业里，$e$ 是对银行家最有帮助的一个数．人们可能会问，像 $e$ 这样的数是怎样又以何种方式与银行业发生关系呢？要知道后者是专门跟“元”和“分”打交道的！

假如没有 $e$ 的发现，银行家要计算今天的利息就要花费极其大量的时间，无论是逐日逐日地算复利，还是持续地算复利都无法避免．有幸的是，$e$ 的出现助了一臂之力．

$e$ 的定义是作为数列 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的极限．我们通常写为 $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$．在利息计算中怎样借助于这个公式呢？实际的计算公式是：本利和 $A$，

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

[234]

这里 $P$ = 本金, $r$ = 年利率, $n$ = 一年之内计算利息的次数, $t$ = 存钱的年数.

上述公式可以变形为对于 $e$ 的公式. 当人们投资 1 美元年利率为 100% 时, 一年的本利和可达 $e$ 美元. 开头可能会有人以为总计会是一个天文数字, 但看了下面的估计后就会知道它接近于 $e$ 的值.

| $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$: $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ | $n=100$ | $n=1000$ |
|---|---|---|---|---|
| $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1$ | $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$ | $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$ | $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}$ | $\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}$ |
| 2 | 2.25 | 2.370… | 2.704813… | 2.716923… |

于是, 我们看到: 如果我们投资 1 美元, 年利率为 100%, 那么收益决不会超过 2.72 美元. 事实上 $e$ 的小数点后头 22 位数是 $e = 2.7182818284590452353602$.

下一个问题是怎样对 $A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ 进行工作. 最好先通过尝试来确定看. 比如说我们从 1000 美元开始以年利 8% 存入银行, 让我们看看当按一年期计算, 然后按每半年期计算, 再按每三个月期计算复利时会出现什么.

**一年期**

$1000(1+8\%)^{1(1)}$

$= 1000 + 80$ (利息)

$= 1080$

**每半年期**

$1000\left(1+\frac{8\%}{2}\right)^{2(1)}$

$= 1000(1+0.04)^2$

$= \underbrace{1000(1+0.04)}_{P_1\text{(半年后的本金)}}(1+0.04)$

$= P_1(1+0.04)$

$= P_1 + P_1(0.04)$

(下半年本金)(下半年利息)

**每三个月期**

$1000\left(1+\frac{8\%}{4}\right)^{4(1)}$

$= 1000(1+0.02)^4$

$= 1000(1+0.02)(1+0.02)(1+0.02)(1+0.02)$

$P_1(1+0.02)(1+0.02)(1+0.02)$

$P_2(1+0.02)(1+0.02)$

$P_3(1+0.02)$

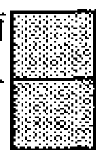
$P_4$

如果逐日计算复利，可用公式 $1000\left(1+\frac{8\%}{365}\right)^{365(1)}$.这个公式如果用手算则要花好多时间，但今天用电子计算器和专门的计算机顷刻间便能得出结果.

[235]

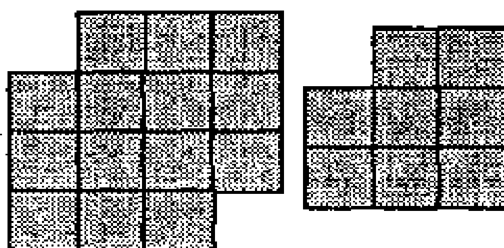
# 多米诺谜题及其他

一个多米诺片是由两个全等的正方形连接在一起而构成的.



**多米诺谜题**

右面的图形哪些可以只用多米诺覆盖? 记住多米诺必须是同样大小,而且一个不能放在另一个上面.



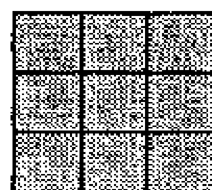
**三阶米诺谜题**

三阶米诺是由三个全等的正方形连接在一起而构成的. 有右图 I,II 所示的两种三阶米诺形状.



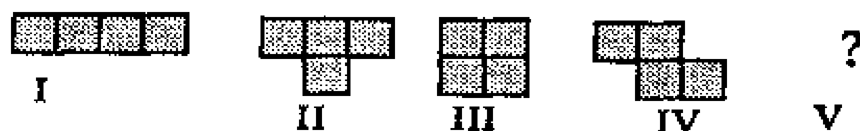
I　　II

能够只用 I 型三阶米诺覆盖右图的 3×3 正方形吗? 只用 II 型三阶米诺呢?

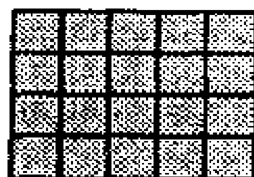


**四阶米诺谜题**

四阶米诺是由四个全等的正方形连接在一起构成,其可能的形状有:



I　　II　　III　　IV　　V



左图 5×4 矩形能够只用 I 型四阶米诺覆盖吗? 只用 II 型呢? 只用 III 型呢? 只用 IV 型呢? 只用 V 型呢?

不要就此停止,做出你自己关于五阶米诺、六阶米诺、七阶米诺、……的谜题.

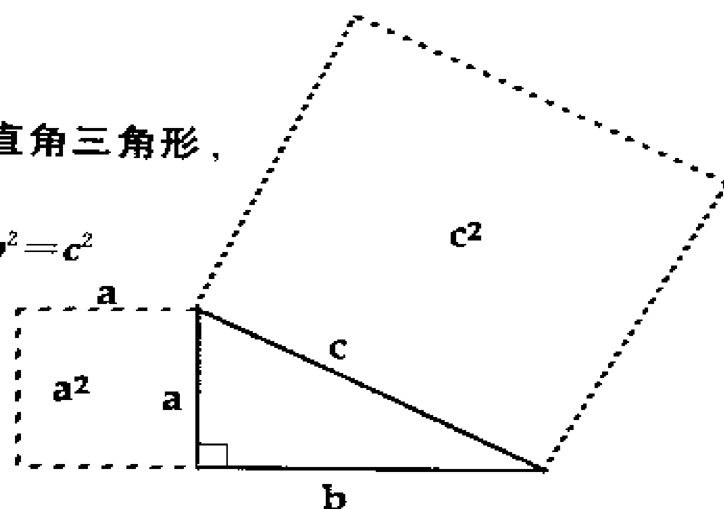
[236]

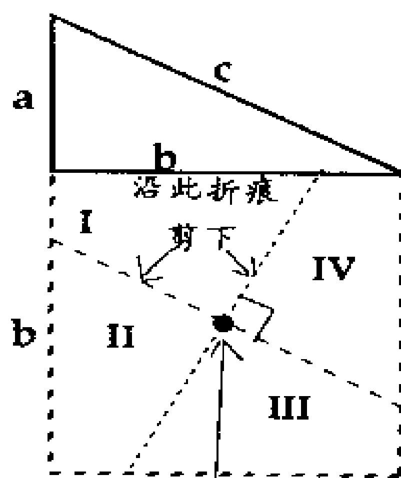
# 用折叠方法证明毕达哥拉斯定理

折纸可以用来证明许多几何定理，包含命题："任意三角形的三个内角和为 180°."下面是一种用折叠纸张的方法对毕达哥拉斯定理的证明.

**给定一个直角三角形，证明**

$$a^2+b^2=c^2$$

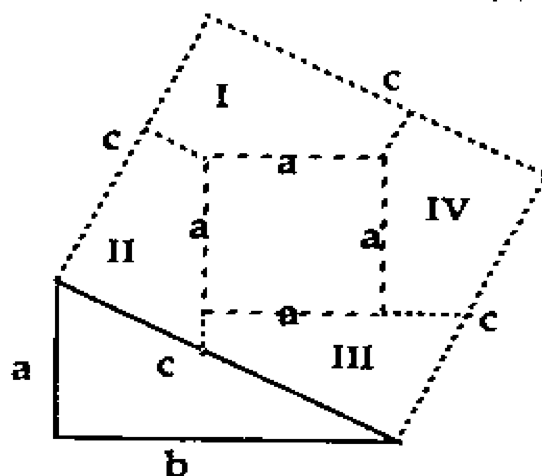



通过找正方形对角线交点的办法找出正方形的中心.

将以 $b$ 为边的正方形和以 $a$ 为边的正方形共五块图形重新组合成一个以 $c$ 为边的正方形. 它显示出：

$$a^2-b^2=c^2.$$



# "卷线轴"玩具的数学

"卷线轴"玩具[①]有比我们眼睛看到的更多的样式。人们会想,玩卷线轴就像扔一块石头那样。但是错了!从物理上讲卷线轴更像一个滚动的球。卷线轴的系绳在它所在的平面上活动。如果卷线轴此刻正往地面上降落,那么这时它在绳子上的转动速度越来越快。由于此时绳子正在解开,所以卷线轴的"轴"变得越来越小。卷线轴"轴"的直径越大时转得越慢。因此开始下降时转得较慢。不过,起初虽然转得慢但势能较大,随着绳子的解开,不断获得动能。所以下落时速度变得越来越快。到了绳子底部,卷线轴速度达到最大,但也耗尽所有可用的势能。事实上,此时才到达运动的中点,接下去绳子又绕轴卷起,开始了损失速度增大势能的另一半路程。



早期的卷线轴,绳子是固定在轴上的,而卷线轴则总是上下起伏地旋动着。但后来D·邓肯(被誉为现代卷线轴之父)作了改

---

① 译者注:"卷线轴"是民间常见的一种儿童玩具,它的英语名称为"yo-yo"。其结构为一卷线轴形状的木块,系于绳子的一端,将绳子卷在轴上并用手牵动绳子的另一端,可使之上下旋动。

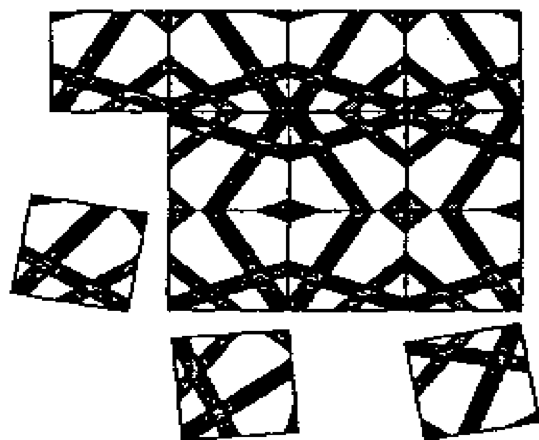
进,将线绕在轴上并能自由地转动,绳子则必须保持碰到卷线轴的边,从而使转动的损失达到最小.此后设计者们又造出新的高技术的卷线轴,它有一个凹进的轴,外层涂有特氟隆[①].不过,卷线轴的革新大约不会就此停止.

[238]

① 译者注:即聚四氟乙烯,一种耐热性与耐腐蚀性都极好的塑料.

# 创作数学的镶嵌

计算机绘图易于改动的特性，为数学的镶嵌开拓了一个全新的远景．利用已有的程序，只要咔嗒一声，计算机便能毫不费力而又准确无误地进行变换、旋转和反射．你能想象得到，这样一种工具会对阿尔罕布拉①的穆斯林艺术家和数学家们，或M·C·埃舍尔的工作造成怎样的影响．



作为镶嵌基础的数学知识，将帮助艺术家们创作新的作品．而计算机时代，大概将会引进一种全新的镶嵌设计．

下面一些观念是许多世纪来在平面和空间镶嵌方面的发现：

● 最早对于镶嵌的观察是自然界的六角形的蜂窝．事实上，公元前4世纪古希腊的数学家帕普斯就观察到密蜂只用正六边形制造它们的巢室．这种形状的构造会使所需要的材料最少，而且所形成的空间最大．

● 希腊人发现并证明了等边三角形、正方形和正六边形是仅有的三个能镶嵌平面的正多边形．从古代的一些地板镶嵌的图案，说明当时的工匠已经学会用正多边形．

● 正多边形的联合可以创造新的镶嵌图案．但连接于同一顶点的多边形，其角大小的总和必须为360°，否则就会出现缝隙或重叠．

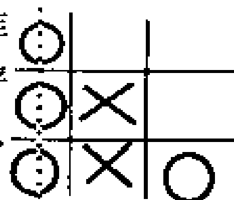
[239]

① 译者注：阿尔罕布拉是14世纪西班牙摩尔族的王室宫殿．

## 没有疆界的连子游戏

发现游戏的策略需要逻辑，而逻辑和直觉是建立在数学的基础上.

最简单的连子游戏是“吃井字”:两人限制在九宫格内轮流画各自的记号,谁先画成三子连成一线就算谁胜.而一般的连子游戏没有九宫格那样的边界限制.除非已定胜负,或棋盘用尽,或双方同意,游戏方告停止.



方格绘图纸是游戏的理想棋盘.游戏前双方要约定多少个记号连成一直线算是胜利.具体的数目可长可短,初学者最好先从三个开始,起初范围也不要太大.熟练后再换成四个连成一

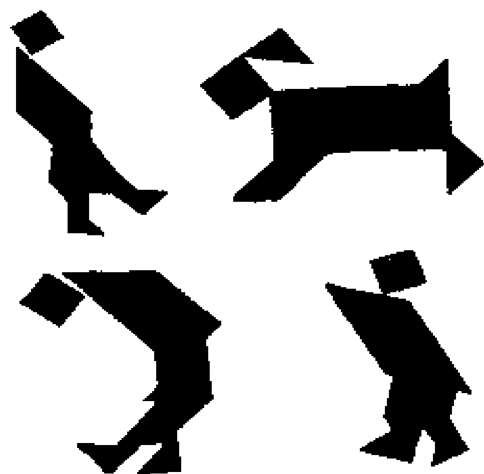
# 数 学 的 玩 笑

数学家在学术上一般是不戏谑的，因为严谨和认真是人们对数学的一种追求．而当一种戏谑被揭示时，他们往往能察觉出原因之所在，而即使有些失败在他们看来也只当是一种幽默．下面是一些著名的数学玩笑：

● 费尔马大定理[①]——

这是一个至今未证的定理[②]．问题是：费尔马是真的证明了这个定理呢，还是他的数学恶作剧？他声称自己已经证了它，但人们知道他经常出一些问题让同事们去进行一些无谓的尝试．他们相信他知道一些他们所不知道的东西．如果这是一种有目的玩笑的话，那么他并不乐于知道这个问题会持续多久，而后来会变得多少著名．

● 山姆·洛依德的七巧板[③]起源——



美国谜题专家山姆·洛依德应该说是一位喜欢戏谑的人．早年时人们有时会看到他在棋类栏目中一些奇奇怪怪的解答．他的一个最令人迷惑的玩笑是他关于七巧板起源的故事．正如他在《第八茶皮书》中所陈述的那样，他编造了一个七巧板演化的故事，它是如此地令人信服，以致许多读者乃至于今天的作家们都信以为真，而在他们著作中

① 原注：见第178页该定理的背景．

② 译者注：这个定理不久前已被证明，详见本书第258页"数学问题与发现"一节的译者注．

③ 原注：见第6页背景信息．

引用了这个虚构的故事.

● 马丁·加德纳四色问题玩笑——

马丁·加德纳在1975年4月说他已为他的四色问题给出一份奖赏.这个玩笑登在4月份的《科学美国人》上,目的是作为四月愚人节的文章.他原以为没有人会认真对待这件事,不料令他惊奇的是,居然收到了超过1000封的读者来信,他们真的相信了这个故事.我想加德纳的这个玩笑要保存下来,于是在1989年9月出版的本书上册中特别对W·麦克格里哥"需要五种颜色"的地图作了引证.

● N·布尔巴基玩笑——

布尔巴基是谁?虽然布尔巴基其人不存在,但以他名义出版的数学书却一本又一本,而且非常实在和严肃.布尔巴基是一群隐蔽的数学家,他们写下了许多卷的《数学原理》,以布尔巴基为笔名.虚构的布尔巴基是一位具有希腊名字,来自南锡[①]的法国人,而且与虚构的南加哥大学相系.虽然布尔巴基的数学著作和见解不断取得成功,但没有人能够知道这个秘密小组的全部[241]成员.

① 译者注:法国东北部的一个城市.

# 算术三角形的起源

人们常把数的三角形与数学家帕斯卡的名字结合起来，成了众所周知的帕斯卡三角形．帕斯卡最早是在他的书《论算术三角形》中写到它的（约 1653 年）．但这个数的三角形在帕斯卡之前很久就已经为人们所认识．在中国数学家杨辉和朱世杰的著作（《四元玉鉴》）中就包含了算术三角形与出现在算术三角形中的数列的求和两种．


Eyn Newe
Unnd wolgegründte
underweysung aller Kauffmanß Rech-
nung in dreyen Büchern/mit schönen Re-
geln vñ fragstucken begriffen. Sunder-
lich was fortl unnd behendigkait in der
Welschē Practica vñ Tolletn gebraucht
wirdt/ des gleychen fürmalß weder in
Teütscher noch in Welscher sprach nie
gedrückt. durch Petrum Apianū
von Leyßnick/d Astronomei
zů Ingolstat Ordina-
riū/ verfertiget.

1527 年出版的 P·阿皮安的书《Rechnung》的内封页．

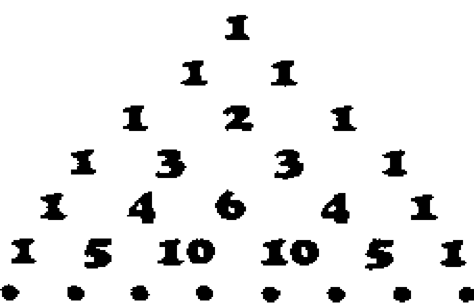
在《四元玉鉴》（1303 年）的开卷中，有一张算术三角形的说明，标题为“古法七乘方图”，显示了二项展开式八次方的系数．朱世杰提到，算术三角形是一种求二项式第八次方和较低次方的古老方法．这种古老的方法见于另一本中国的数学著作，该书

写于公元1100年，书上显示了一种表示二项式系数的系统，这暗示了算术三角形当时就已存在.

有证据表明，二项式定理和算术三角形那时也已为波斯的诗人、天文学家和数学家海亚姆(Omar Khayyam，1050?—1123)所知道. 在他的书《代数》中，他提到他在别的地方叙述了确定二项式4次，5次，6次和高次方的规律的发现. 不幸的是，论述后者的著作现已失传.

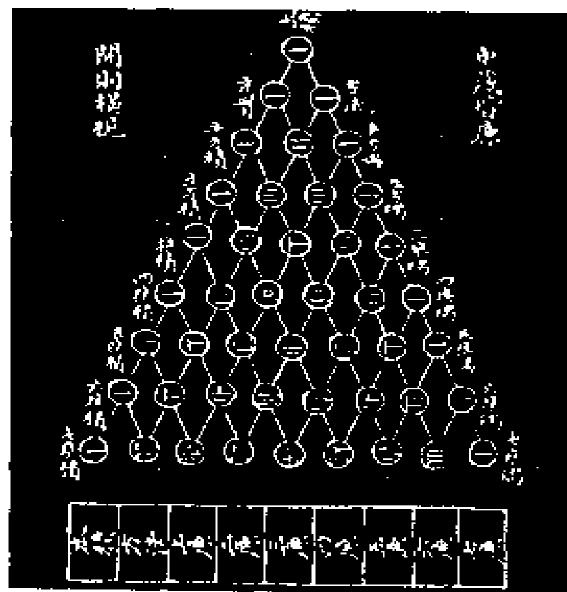
[242]

残存的最早的包含有算术三角形的阿拉伯著作出自15世纪的阿尔·卡西. 公元1527年，P·阿皮安的书《Rechnung》的内封页，就印有算术三角形. 而在M·斯蒂费尔的书《整数算术》(1544)中，也含有"帕斯卡的"三角形.




推出算术三角形六行.

虽然帕斯卡不是算术三角形的创始者，但应该承认他发现并证明了算术三角形的一些新的性质.



[243]

算术三角形的中国样式.

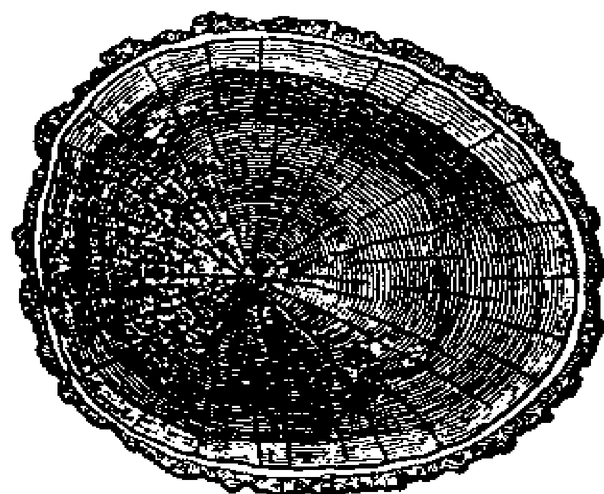
# 红木树——数学与自然

自然总是让人大吃一惊.当我们仔细看看自然界的各个领域,便会得出这样的结论:自然似乎懂得数学!

那高高的海岸红木,那巨大的加利福尼亚美洲杉,都是地球上最古老的活在世上的东西.在它上面我们能够发现一些诸如同心圆、同心圆柱、平行线、概率、螺线以及比等数学概念.

● 同心圆、圆柱体和平行线——

在旧金山以北几英里的缪尔[①]树木名胜古迹区,人们可以发现一丛巨大的红木树.在缪尔树木陈列室里有一个古代树的横断面.沿着断面上的同心环,有着许多历史资料的记录.在这些记录中,有基督的生日、诺尔曼人的征服,哥伦布发现新大陆等年份的标记.



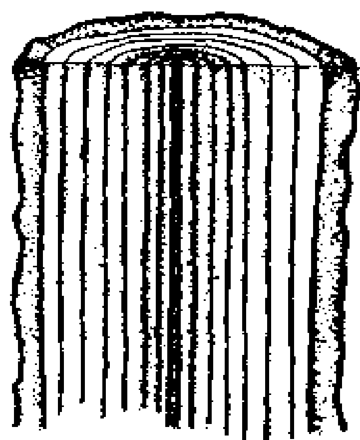
一棵树的水平断面显示出同心圆的形式.正常每年生成一个圆环,环的宽度则依赖于气候的变化.干旱的季节所生的环窄些,除了用这些环确定树的大致年龄外,这些环还揭示了影响它生长的气候和自然现象的信息.科学家们能够用这些环来证实诸如干旱、火灾、洪水和饥荒等假说.

当观察树的整段长度时,这些同心圆表现为同心圆柱.这些

---

① 译者注:缪尔(Muir)是19世纪末20世纪初美国著名的博物学家.

[244] 圆柱的纵断面是一系列平行线.靠中心的平行线是树的心材(死细胞).接下来是白木质的平行线,它为树木上下输送养料.随着树的生长,白木质圆柱层逐渐变为树的心材.在树皮与白木质之间有一个单细胞的圆柱层,称为形成层,新的细胞正是由形成层制造并变为树皮和白木质.



● 概率——

不同树种之间种子的大小和数量有着很大的差异,例如,七叶树的种子每磅只有 27 个,而相比之下红木树种子每磅却多达 12000 个.红木树的毬果长度在$\frac{1}{2}$英寸到 1 英寸之间,其中带有 80 到 130 个的种子.这些种子能够在 15 年之内发芽、生长.事实上,一棵巨大的红木树每年产生几百万颗种子,通过种子的数量对种子的发芽率予以补偿.在逆境下,许许多多小小的种子会增加红木树萌芽的机会.而种子发芽后说不定几千个中也只有一株有望长成大树.

● 螺线——

看一看红木树的树皮,人们注意到在它的生长图案中有一些轻微的旋动.这是一个在增大的螺线.它是由于地球的自转以及稠密森林中微弱阳光对红木树生长方式的影响两者造成的.

● 比——

有一个令人惊异的根系支撑着这些高大挺拔的巨树.这些根系主要由浅根(4~6 英尺深)构成.支撑巨大红木树的是通过侧向向外的支根.根系与树高的比通常在$\frac{1}{3}$与$\frac{2}{3}$之间.例如,树高为 300 英尺,则它根系的侧根从树干的底部算起大约要有 [245] 100~200 英尺,才能为大树提供一个坚实的基础!

没有什么会比数学的演算更加令人烦恼……诸如一些大数的乘、除、平方、立方、开方……因此我开始考虑……怎样才能排除这些障碍.

——J·纳白尔

# 早期的计算工具

没有多少年前,计算尺还是科学家和学生们易于携带的计算工具.今天,计算尺已为小小的程序计算器所替代.这种计算器能施行多位数的加、减、乘、除运算;计算 $n$ 次方幂及 $n$ 次方根;贮存 $\pi$ 和 $e$ 的值;实行单位换算;即时计算该付的货款;甚至于计算和展示函数的图象等等.看一看这几千年来是怎样一步步演进到今天这种高科技的工具无疑是有趣的.

人类最早的计算器具是自己的手.随着时间的推移,一种用手表示的数的系统发展成为商业上以及不用同一种语言人之间交流的工具.甚至在今天我们还能看到一些年轻的学生用他们的手指来计算或进位.

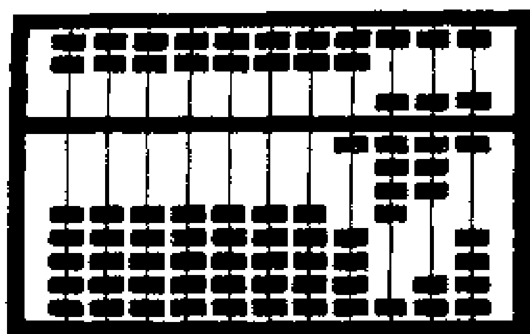


结绳是印地安人用来记帐的工具.它是通过在绳子上打结而成,用这种方法将整个印加帝国的帐目记录并保存下来.

然而当数的计算超过我们十个手指时,人们便开始探索新的工具.最先想到的是堆置小卵石的方法,但依然靠一个人去执行聚集和计算石子这样较为重要的工作.然后就有人萌生了制作易于携带小卵石的器具的念头,最后引发了算盘的构想.

各种各样的算盘在中国、古希腊、古罗马等地使用着.算盘至今仍在亚洲许多地方流行.中国人最早是用竹算筹来计算(约公元前 542 年,)而算盘进入他们的计算领域大约在 12 世纪.在那以后的若干

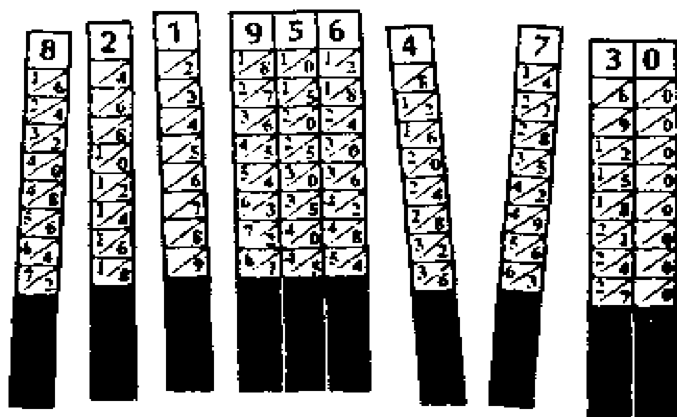
[246]



算　盘

世纪，算盘对于通常的商业计算已经足够了①.然而数学家们需要应付各种各样的问题.这些问题要求计算非常大的数或非常小而带有复杂小数的数.这时算盘显得不能满足，而手算则既花时间又容易出错，于是一个新的方法被设计出来.

在17世纪，J·纳白尔(苏格兰人)发明了对数.根据对数的原理，制成了一种叫纳白尔骨筹的算筹.商人们带这么一套用象牙或木头做的算筹可以施行他们的计算.没有对数的发明，也就没有E·冈特(英格兰人)计算尺的发明(约1620年).利用对数还能印制出应用广泛的数学用表，它使包括乘方、开方等复杂的计算以及困难的乘除运算都变得十分容易.而且大大减少了花费的时间.



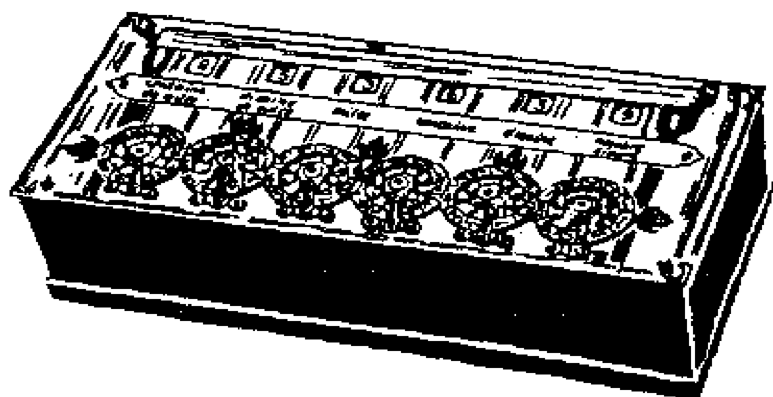
纳白尔骨算筹

公元1642年，年仅18岁的法国数学家帕斯卡建造了第一台计算器.他制造这台机器的目的大概是想帮助他父亲算帐.这台计算器可以进行加减.但从商业的角度看它不可能得到普及，[247] 因为商人们可以雇人做这项事，其花费要远比机械的维修费少

① 原注：当然，航海要求专门类型的计算工具，并用恒星来确定航海路线.我们发现了一些星图以及更后些时的六分仪(1757).

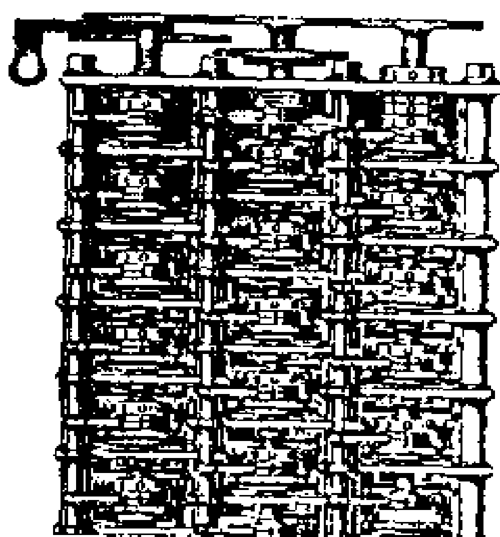
得多.但它的意义却在于向更为复杂的设计走出重要的一步.

公元1673年,德国数学家G·W·莱布尼兹设计出一台新的计算器,这台计算器除加减外还能计算乘除.这台机器虽然远非



帕斯卡的计算器

完美,但却是一个非常重要的开始.它经过不断的改善和发展,最后演进为手摇的台式计算机.



巴贝格的差分机

与此同时,英国人C·巴贝格对于出版的图表中不断而反复出现的数字错误感到非常失望,并决心建造一种机器,这种机器能对预先指明的资料按程序进行计算(约1812年).

不幸的是,当时的技术无法生产足够精密度的齿轮和榫牙装置.但是他的工作以及沿着他的道路艾达·洛弗拉斯对计算机程序方面的工作①,却为现代计

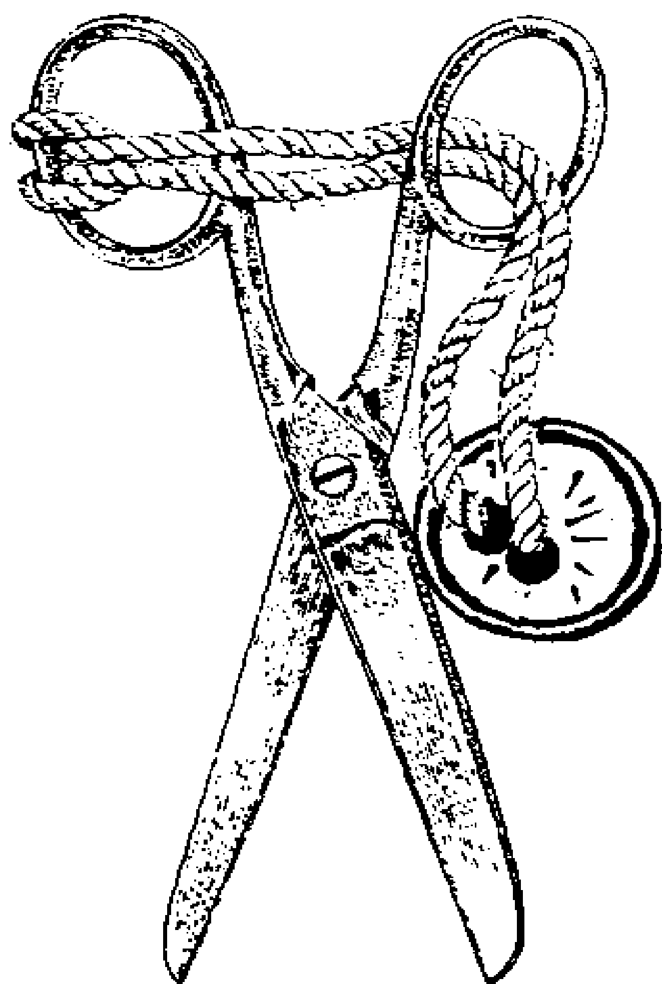
① 原注:为了纪念巴贝格及艾达·洛弗拉斯的精神和工作,IBM公司建造了一台巴贝格和艾达的分析机工作模型(后者提供程序设计上的帮助,并在财力上支持了巴贝格).

算机奠定了基础.

下一个突破口是来自人口调查.1880年的人口调查用人工计算花了10年时间.等调查结果出来,下一次调查则又要开始.[248] 1887年美国人口调查部门宣布开展一场全国性的比赛,该赛事旨在发展一种在人口调查方面可靠而有效的系统.结果发明家H·霍勒利斯推出了一台机器,该机器用记数轮和继电器打卡.霍勒利斯的机器取得了决赛权,但也遇到了多方面的怀疑.竞赛组织人决定,三个人选决赛的人每人都要进行一次实际的运转试验,结果霍勒利斯的机器只花5.5小时便完成了工作,而与他最接近的参赛者却花了44小时.最后他赢得了这场决赛.在1890年的人口调查中用了他的机器结果只一个月便完成了任务.不过,这个机器没有贮存资料及按贮存资料运作的能力,不像巴贝格所拟想的那样.

到了20世纪,现代计算机开始显露端倪.这个世纪的每十年工艺上都有着很大的进步和改善——电动机器的使用,真空管的开发和初期应用,半导体和集成电路的发现,在一块硅片上大规模集成电路的开发(它使个人计算机在大小和价格上成为[249] 可行)等等——从而也使计算工具的发展突飞猛进!

# 拓扑谜题 ——剪刀、纽扣和绳结



取一把剪刀、一颗比剪刀手柄上的洞大些的纽扣和一条绳子，绳子如图穿过纽扣和剪刀.

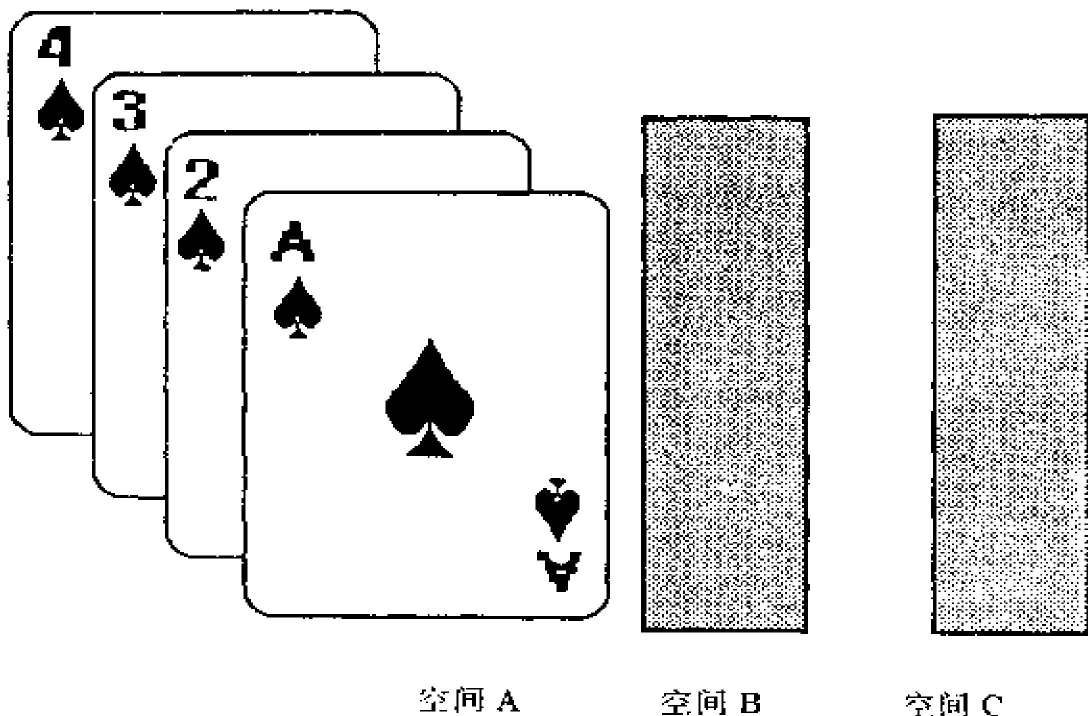
试找出一种方法，在不剪断、不解开绳子的前提下让绳子与剪刀分开.

[250]

## 梵塔问题的一种改头换面

这道谜题是众所周知的梵塔问题[①]的一种改头换面.

● 取四张牌——一张 A(1),一张 2,一张 3,一张 4.




● 谜题的目的是将空间 A 的牌放到空间 C 去,但要遵从

① 译者注:梵塔问题源于有关"世界末日"的古老传说:在世界中心贝那勒斯(印度北部的佛教圣地)的圣庙里,安放着一块黄铜板,板上插着三根宝针,细如韭叶,高约腕尺.梵天在创造世界的时候,在其中的一根针上,从下到上串上由大到小的 64 片金片.这就是所谓梵塔.当时梵天授言:不论黑夜白天,都要有一个值班的僧侣,按照梵天不渝的法则,把这些金片在三根针上移来移去,一次只能移一片,并且要求不管在哪根针上,小片永远在大片上面.当所有的 64 片,都从梵天创造世界时所放的那根针,移到另外一根针上时,世界就将在一声霹雳中消灭.梵塔、庙宇和众生,都将同归于尽!这,便是世界的末日……

以下的规则：

——一张点数大的牌决不能放在一张点数较小牌的上面，例如，你不能把"2"放在"A"的顶上，但可以把"A"放在"2"，"3"或"4"顶上．

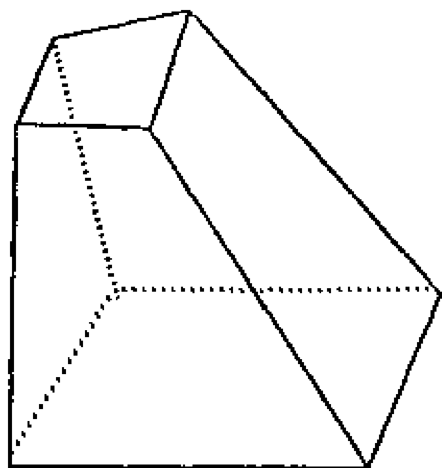
——你每次只能移动一张牌到新的空间．

如果你掌握了从"A"到"4"这四张牌的移动方法，那么现在你可以将牌增加到五张、六张、……，再试试看．

祝你好运！

# 不可能的图形

骗人的图形在数学的解题中常常是导致失误的一种原因.例如,用 17,6.75 和 10.2 为边作三角形.检查一下该"三角形"的边就知道这个图形不可能用给定的长度作出(三角形任意两边之和必须大于第三边).

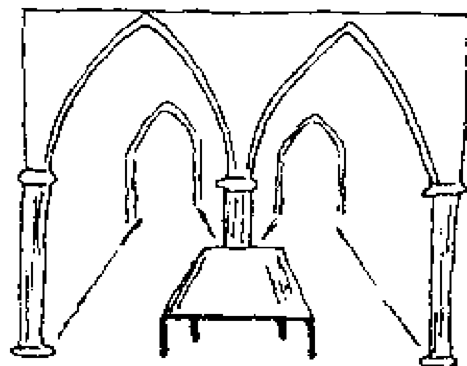


是一个削去的锥体吗?

现在研究一个"削去的锥体"图形(左图).你知道为什么所画物体不是一个削去的锥体吗?

古往今来,不可能的图形刺激着艺术家和数学家们的智力.早期的不可能的图形大概就是由于艺术家们错误的透视画法所造成的结果.要不就是故意的.我们在修复 15 世纪荷兰布拉达的 G·柯克的作品中发现了这类例子.下面我们见到的三柱两拱结构就是柯克的作品——图中柱是共线的,但它出现的方式是:前面的弯拱安置在它上面,而第三根柱基却出现在背景里.在 16 世纪,G·B·皮仑尼斯所作的石版画《想象的地牢》,其中就出现了不可能的图形,所创造的是一种奇怪的空间景象.

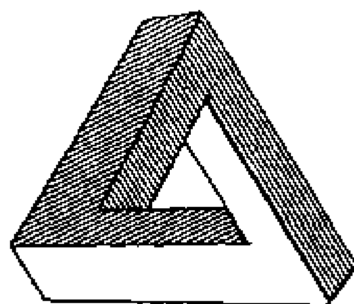
[252]



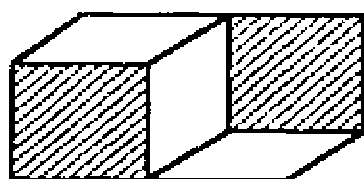
在柯克的作品中对三柱的一种描绘.

在 19 世纪,我们可以看到大量对视幻觉的创作和研究.而在 20 世纪,我们发现了许多含有不可能图形的令人兴奋的作品.瑞士艺术家 O·柳特斯瓦德在 1930 年首先画出了不可能的三接

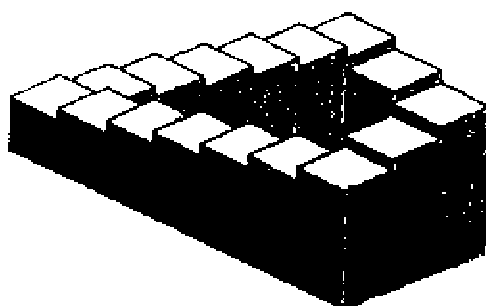
棍(用九个立方体的一种排列).随后,他又制作出了许多类似的画.本世纪50年代,罗格和L·S·朋罗斯写了论不可能图形的文章.文中他们描述了三接棍和一种没有尽头的楼梯.后者无止境地上升和下降,而依然保持在同一的水平面上.上述的概念被像M·C·埃舍尔这样艺术家用来为他们的作品润色.埃舍尔创作了许多这方面令人兴奋的石板画.



三接棍



立方体的二重性——立方体可以看作向内或向外.

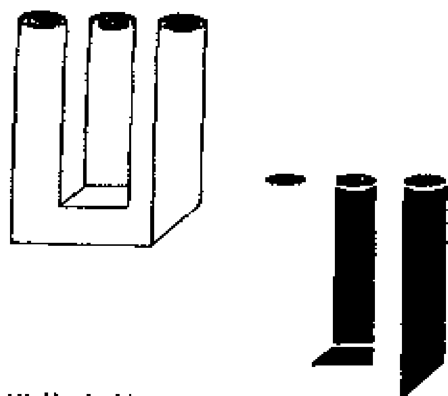


上升和下降的楼梯(根据朋罗斯的作品).

——《瀑布》(1961),它是根据不可能的三接棍创作的.

——《凹凸》(1955),那是利用立方体看起来或凹或凸的二重性创作的.

——《望远楼》(1958),它是用不可能的长方体创作的.



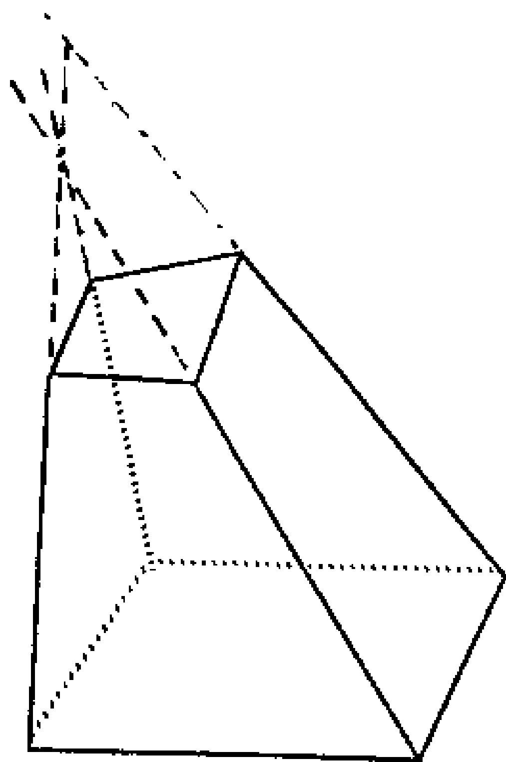
这是用计算机作出的"不可能的叉子"在黑白转换前及转换后的样子.

——《上升和下降》(1960),它是根据罗格和朋罗斯所提出的楼梯创作的.

上述作品在 B·恩斯特的书上得到了引证、分析和研究,而且还添加了专门的评注.

[253]

今天,计算机已成为艺术家和数学家十分有用的新的媒体.艺术家和数学家们借助手上的计算机,可以创造出新一代的不可能的图形.例如,看一看上图的"不可能的叉子"中究竟发生些什么?当计算机的按键咔嗒一声时,黑白颠倒了(白的部分全都变黑,黑的部分全都变白),现在它给人一种全新的感觉.想必这些新的图形会令人感到振奋.很明显,对于将来的不可能的图形,那富有魅力的数学的解析,必将激励着人们的智力和想象.



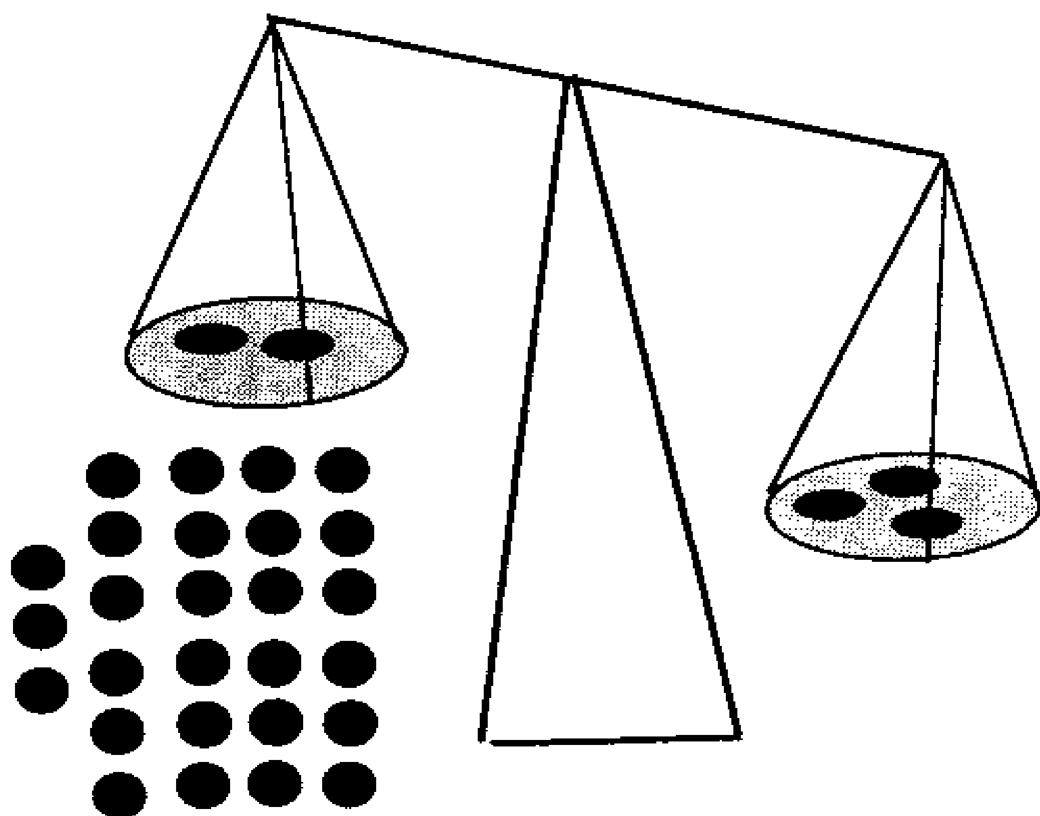
由于侧棱的延长线并不交于单一的点,所以它不可能形成一个锥体.

[254]

# 哪一枚硬币是假的?

27 枚硬币中有一枚是假的. 假币的重量比其他 26 枚略轻, 而这 26 枚重量相等.

试问, 最少需要称量几次才能确定出假币?

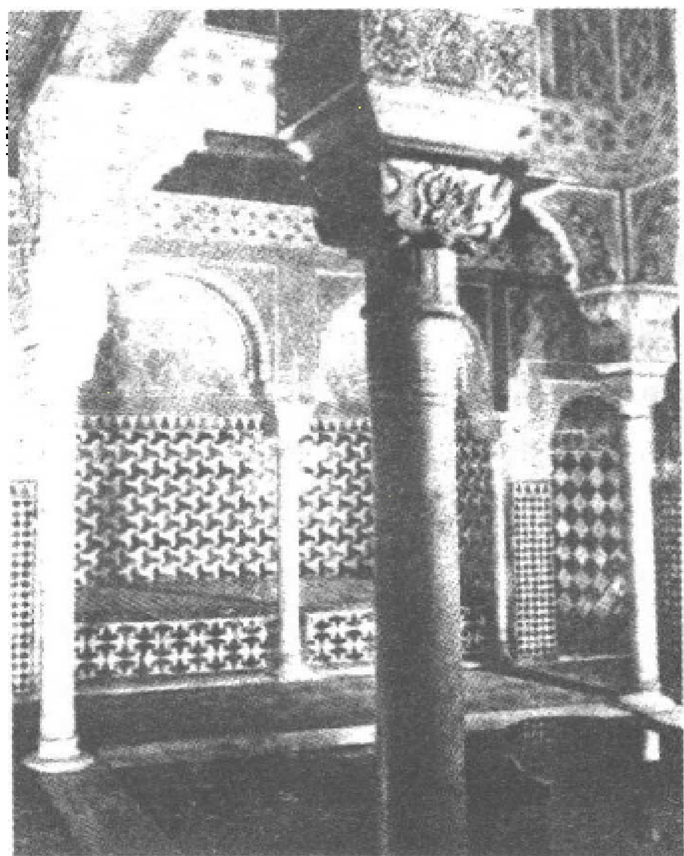


(解答见附录)

[255]

## 数学、穆斯林艺术及埃舍尔

在穆斯林艺术的演进中，伊斯兰地区起着主要的作用. 由于穆斯林严令禁止艺术家画活着东西的像，所以他们的艺术有着一种全然不同的特征. 穆斯林们信仰他们的上帝阿拉，把他看成为仅有的生命创造者；因而一名艺术家当他试图描画或雕刻一个栩栩如生的物体时，便侵犯了阿拉的领地. 这种信仰给穆斯林艺术家的创作加上了非常严格的限制. 他们需要在作品中力求避免人类和动物的肖像的出现. 从而只能将自己的创作引到一个非常特殊的区域，即将作品限制在装饰和镶嵌方面，并跟几何



阿尔罕布拉的众多房间之一，它以镶嵌装饰.

图案及植物花草等图饰相联系.穆斯林艺术家钻研数学,为的是拓宽受限制的媒体的范围.

图示的阿尔罕布拉是一座优雅的穆斯林建筑和艺术的精萃.这座宫殿式的要塞位于西班牙的格拉纳达.阿尔罕布拉由摩尔族王室于1248至1354年间建造.它是欧洲摩尔人艺术的最为优秀的例子之一.阿尔罕布拉的墙是用一种令人惊异的变化的图案来装饰.那里可以看到诸如对称、镶嵌、反射、旋转、几何变换、明暗一致,等数学概念.艺术家发现并应用这些概念以寻求扩展他们的艺术形式.数学家和艺术家们知道如何镶嵌平面,他们发现了所有可能存在的平面对称.在阿尔罕布拉,M·C·埃舍尔为摩尔人的镶嵌艺术所鼓舞.1926年,他第一次对那里进行了短暂访问,随后便着手设计一些自己满意的镶嵌图案,但这种努力失败了.于是又把自己的努力放到了充满空间的艺术上,并为此花上了十年.1936年,他带着妻子重返阿尔罕布拉.在这次访问中,他再次受到鼓舞,那里丰富的充满空间的设计给他留下了深刻的印象.他和他的妻子花了许多时间来临摹这些迷人的镶嵌.当他回到自己家时,便对所收集到的图案详加研究,还从各种书籍中寻找装饰的类型和它的数学依据.他如此沉浸于这些对象,终于取得了收获,完成了自己独有的系统,一种创作图案时周期性充满空间的规律.埃舍尔说过: [256]

> "摩尔人掌握了用全等图形铺满平面而不留任何缝隙的方法.在西班牙的阿尔罕布拉,他们用全等的、多彩的陶片来装饰墙面,陶片放在一起中间没有缝隙.可惜的是,伊斯兰禁止像的制作.这样,他们的镶嵌只好限制在绝对的几何形状的图形上……我发现这些限制全都难以接受,因为它正是我自己图案构造中所常用的,后者也正是我对这个领域永葆兴趣的原因."

依然留下的问题是：如果穆斯林艺术家没有这些限制的话，那么他们的艺术将会怎样演化呢？特别地，数学又将怎样扶持它呢？

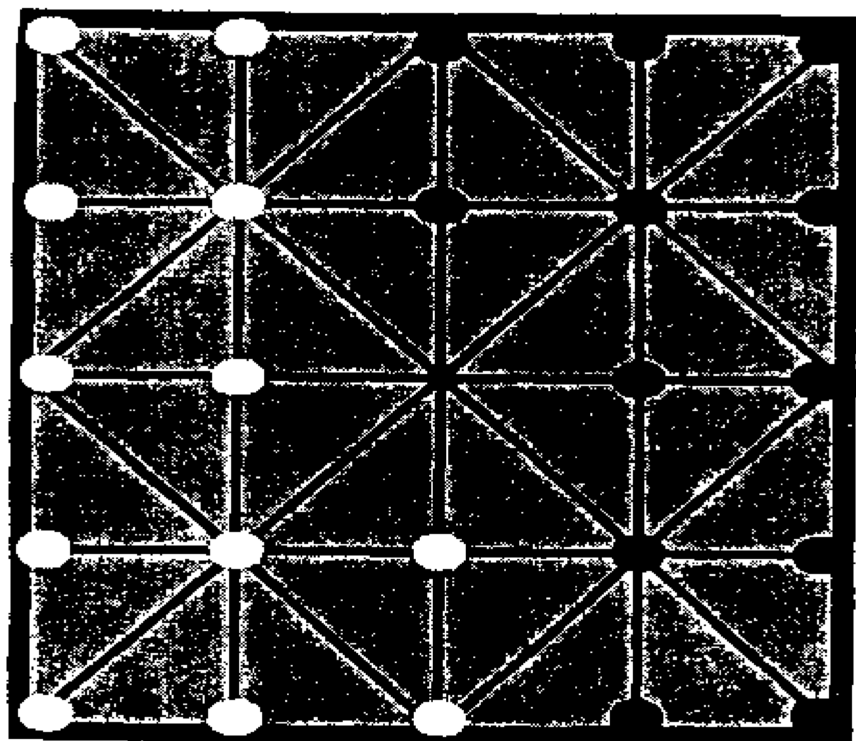
[257]

需要用棋盘的游戏出现在几乎所有的文化中.这些作为娱乐和消遣的棋戏,其历史大多可以追溯到上千年前,但今天依然使人感受到欢乐.

# 跳　吃　棋

跳吃棋是古代一种使用棋盘的游戏,曾在许多国家里流行.它的起源可以追溯到古埃及.事实上,人们在库尔那的寺庙中发现了大约公元前1400年的该棋棋盘雕刻图样.摩尔人统治西班牙的大部分地区达五百年之久,他们最早把跳吃棋介绍到西班牙.后来西班牙人把它称为"类跳棋"游戏.西班牙人移民到墨西哥,这种棋戏也被带到那里,结果成为新墨西哥印地安人所津津乐道的一种棋.

跳吃棋是一种极富挑战性的游戏,它需要许多思考、策略和逻辑.



**游戏的规则：**

1）游戏由两人玩.开始时如图所示排 24 个棋子.

2）双方轮流移动棋子.

3）一个棋子能够移动到任何没有被占领的邻接的空位.

4）一个棋子允许跳过对方邻接的棋子而到达下一个与被跳过的子邻接的空位.在跳的过程中吃掉对方被跳过的子.允许连跳连吃.

5）如果一方一时疏忽而跳错了子,那么这个子就算被对方吃掉.

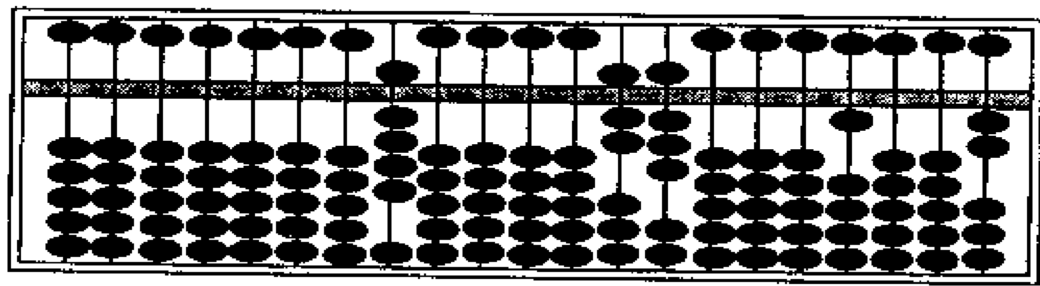
[258] 6）首先吃掉对方全部棋子者胜.

# 日 本 算 盘

日本算盘在日本似乎经历了一场复兴．日式算盘学校十分兴盛．而一些日本计算器厂商还同时生产计算器和算盘——有时甚至把它们装配在一起．

日式算盘的倡议者认为：算盘可以减少错误的机会，而且更快．算盘在算盘家手里胜过一台计算器，而且还能帮助使用者了解算术．

在日本，每年都有一次全国性的珠算比赛．参赛人员要解20道问题，每道题都包括20个11位数相加，比赛要求在5分钟内完成全部问题．



日本式算盘

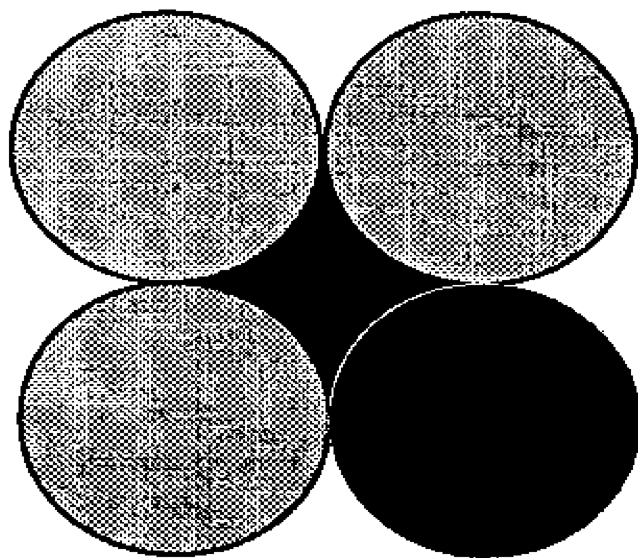
[259]

## 曲线总跟 $\pi$ 有联系吗?

古代世界各地的人都知道圆的周长和它直径之间有着特殊的关系. $\pi$ 这个数表示圆的周长除以直径所得的结果,人们对它的了解和应用已经好几千年.

为了计算圆的面积也要用到 $\pi$,圆面积 $= \pi r^2$. 那么是否所有的曲线的长度和它所包围的面积总跟 $\pi$ 有联系呢? 公元前 450 年,希波克拉底研究了弓形,并证明了两个阴影弓形的面积等于一个阴影三角形的面积.

在 17 世纪人们发现,摆线的长度是一个不依赖于 $\pi$ 的有理量,它等于旋转圆直径的 4 倍. 另外,摆线弧下方的面积等于旋转圆面积的 3 倍,却包含有 $\pi$. 这几个例子说明,曲线跟 $\pi$ 无需手牵着手走!



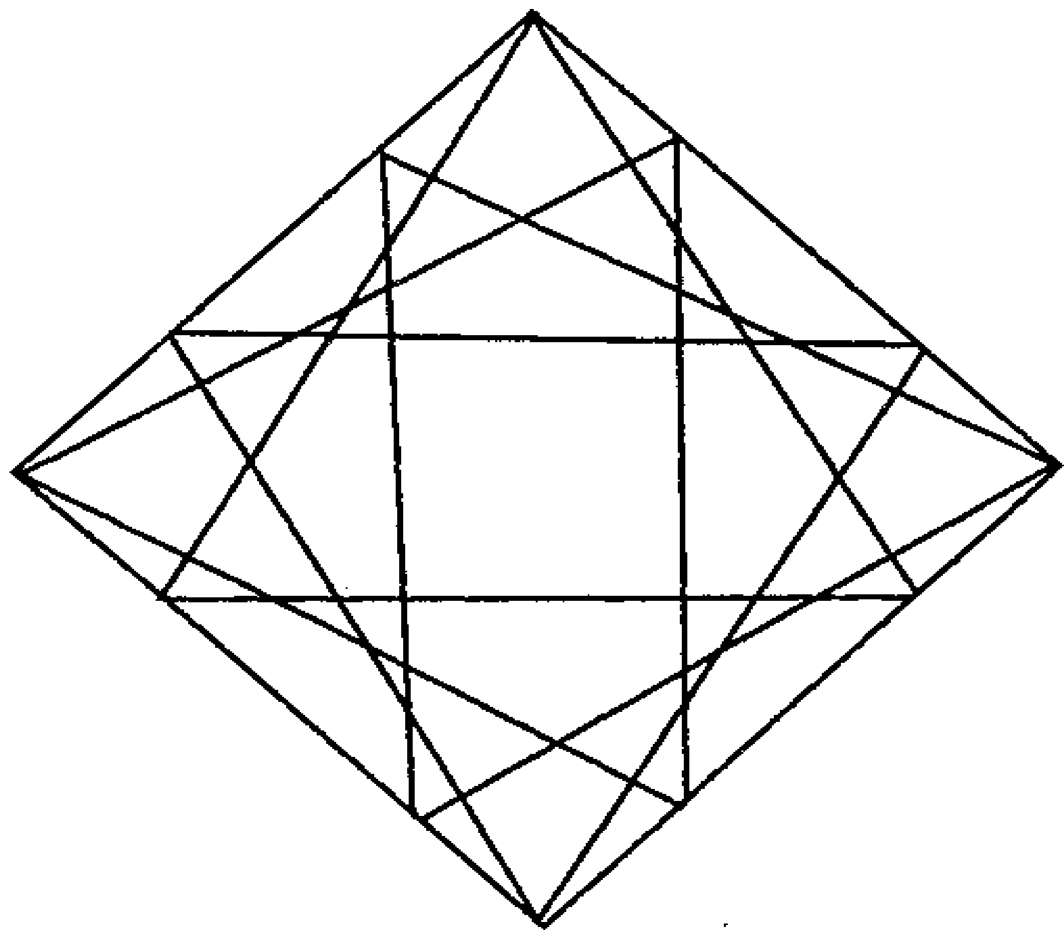
**水壶形谜题**

阴　部分水壶形状的面积依赖于 $\pi$ 吗? 四个全等的圆每个半径均为 $\frac{1}{2}$ 英尺. 试确定该水壶形状的面积.

[260]　　(“水壶形谜题”解答见附录)

# 几何图形的珍贵发现

人们所看到的下面这一令人喜爱的图案是由线组成并构成了不同的形状.但更精细地看一看就会发现,这是由两种等边的图形合并而成——一种是正方形,一种是等边三角形.许多对象都隐存着.事实上构成它的只是一个正方形和四个等边三角形,后者中的每一个都有一个顶点重合于正方形四个角中的一个.试在这个图案中找出对称、旋转、正方形、其他等边三角形、五边形、梯形、六边形、直角等腰三角形、直角三角形、菱形以及平行四边形等图形.



## “翻 转” 游 戏

“翻转”游戏的历史可以追溯到19世纪初，那时它已是一种极为流行的令人欢愉的棋戏。今天，这种游戏所用的棋，甚至以种种的形式作为商品出售.其中一种设计是采用立方体，其六面画上不同的颜色，这样的棋可允许六个人玩.这种游戏还可以通过计算机来进行，由计算机控制难度和速度，此间你和计算机各执一方.

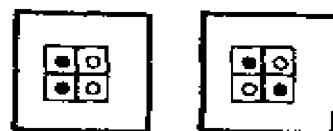
“翻转”游戏是在8×8标准棋盘上进行的，用64枚扁平的具有对比色的棋子(例如一面黑一面白；或有六个不同颜色的立方体等等——译者).正如棋的名称所暗示的那样，游戏的主要动作就是翻转棋子.游戏的规则和程序虽然简单，但游戏本身却极富挑战性.快速的动作会使游戏充满惊奇和意外，直至游戏结束.

对于“翻转”游戏的一种可能的开局.

**程　　序：**

1) 每个游戏者开始各有32个棋子，每人各选一种颜色，且轮流动子.

2) 玩的时候头四个棋子必须放在中央部分的四个方格里.一些可能的开局是——

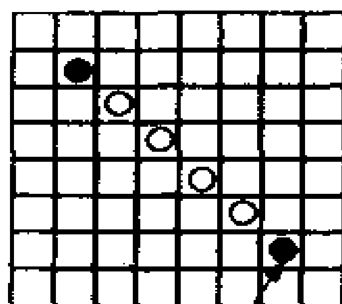


3) 每个游戏者轮流把自己的棋子放在与对方占领子相邻接的空格上，并试图“捕获”对方的棋子.

4) 当对方一个或多个子不间断地连成一线，而该线侧向两

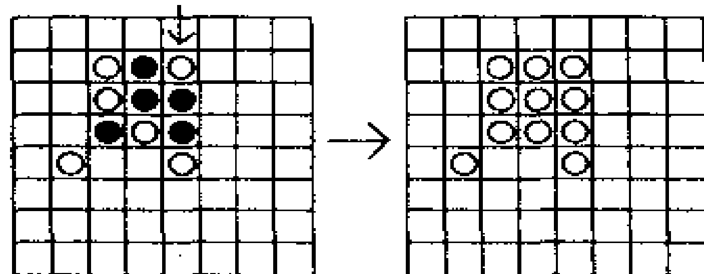
端已为己方占据时，对方这一线棋子便被"捕获"，并将被捕获的棋子翻转为捕获方的颜色.（注：在游戏的过程中一个棋子可能会多次地改变颜色.）

5）当一个棋子放下去时，可能会使对方多于一条的线转变颜色.


当这个黑子放下去时白方的4个就应翻转为黑色。

6）任何一方游戏者都不允许凭自己喜欢不喜欢去决定是否翻转颜色.凡是在该翻转颜色的线上，所有的子都必须翻转.不过，如果翻转后的棋子又造成了新的捕获线，那么就不能在同一次的翻转中捕获.

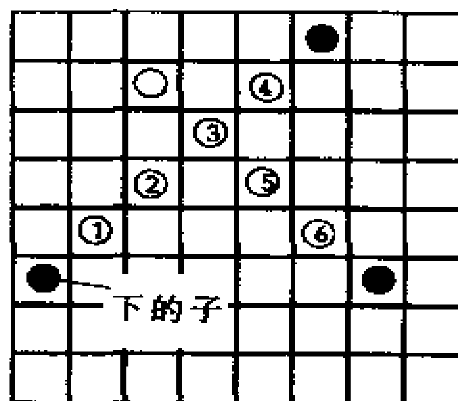
7）如果游戏者不能做到捕获，他就失去了这次轮到的机会.




8）当所有的棋子都下完或没有地方空下来时游戏便告结束.

9）在棋盘上具有最多自己颜色的棋子的游戏者获胜.

让我们尽情玩吧！



从1到4的白子被捕获并转换为黑色。这时3虽为黑色，但不能造成对子5和6的捕获。

## 诗人兼数学家——海亚姆

海亚姆(Omar Khayyam，1050?—1123)以其诗文作品(如《诗集》)而闻名于世.他在数学上也因多有建树而知名，诸如：

- 发现三次方程的几何解法；
- 提出了确定二项式4次，5次，6次或高次方的一种规则(正如在他的书《代数》中所提到的)；
- 写了一些对欧几里得的《几何原本》批判性的论述.

海亚姆还是一位有成就的天文学家.他对波斯的日历加以改造，使其几乎与格里高里历一样精密.在他的《诗集》中，我们



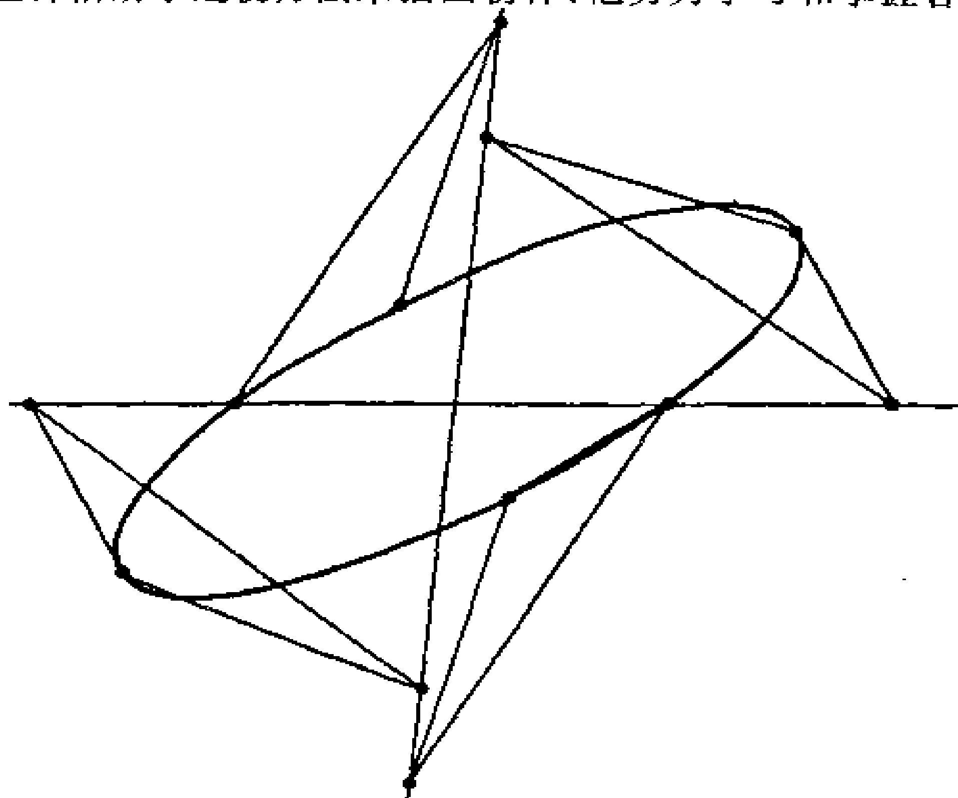
发现有一节提到了他对日历的改造：

> "啊！人们说我的计算，
> 征服了时间，把年份算得更准.
> 而日历让我们想起，
> 昨天已经逝去，明天即将来临！"

[264]

# 达·芬奇与椭圆

达·芬奇是文艺复兴时代的核心人物——一位艺术家、建筑师、科学家、发明家、数学家、哲学家和雕刻师.他的笔记充满设计的草稿和革新的想法,其内延伸到各种各样的物体.他的不少想法对那个时代来说似乎是太先进了.他发明了不同类型的特殊圆规,这些圆规能够产生抛物线、椭圆和比例图形.他还发明了为广大艺术家所应用的透视画法,就像A·丢勒这样的艺术家也都借助于透视方法来描画物体.他努力学习和掌握各种科目



这种机巧的画椭圆的方法是由达·芬奇设计的:

画两条相交直线.

剪一个三角形.在每条直线上分放一个三角形的顶点.如图所示,三角形沿着线滑动.在第三个顶点的位置作记号,则第三个顶点将描出一个椭圆.

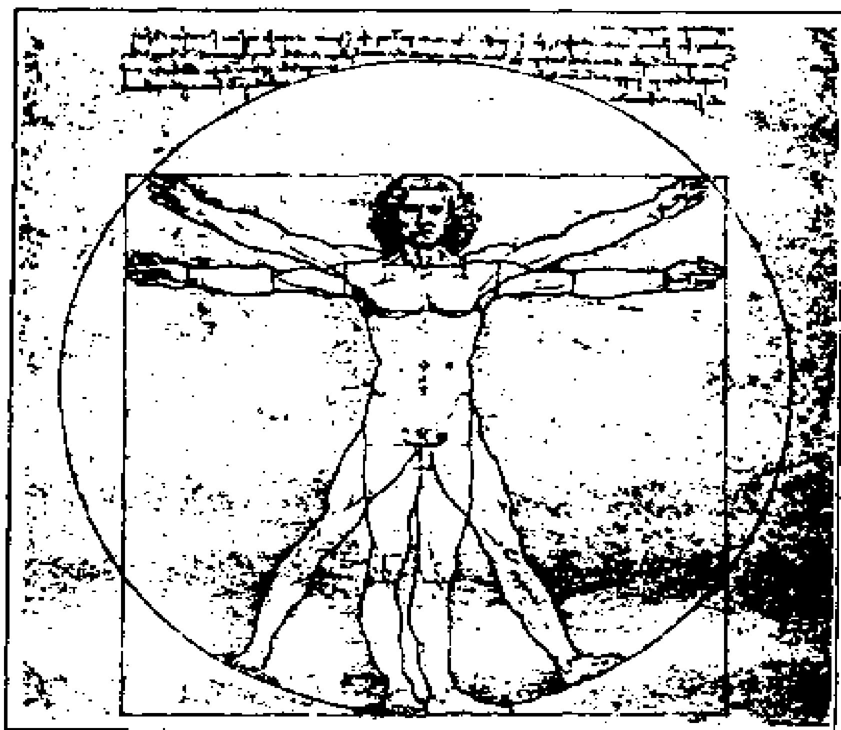
和题材,他知道哪些是主要的以及什么对他的工作具有影响.他的笔记和各种革新方案被广大艺术家视为至宝并用来增进自己的工作.

以上的草图说明了他所创造和发明的描画椭圆的方法. [265]

## $\phi$——一个不是每天都能见到的无理数

现在到了我们从每天所用的数中辨认出 $\phi$ 的时候了.为什么它在我们日常的计算和交谈中很难提到呢?照理它应当占有一席之地并享有应有的荣誉.

$\phi$ 也是自然界中一再出现的数学概念,就像三重接合点,$c$,$e$,$i$,$\pi$,镶嵌,等角螺线,六边形,柏拉图体,螺旋线,摆线,分形,对称等概念一样.虽然 $\phi$ 不是你每天都能见到的无理数,但它在自然界和各种数学思想中出现的频率却与 $\pi$ 一样普遍.由于 $\phi$ 与黄金矩形及斐波那契数列之间有着分不开的联系,所以只要这些数学概念出现在哪里,$\phi$ 也就自动地出现在哪里.诸如花的生长图案、松树的毬果以及带小室的鹦鹉螺壳等等.



这是一张达·芬奇为数学家 L·帕西欧里的书《神奇的比例》所作的插画.该书于 1509 年出版.

虽然一直到 20 世纪，黄金均值（也以黄金比、黄金分割、黄金比例等著称）才得到一个符号，但 $\phi$ 的发现却可追溯到数千年前．我们知道古希腊人构造了 $\phi$，并在他们的建筑设计（如巴特农神殿）和雕刻比例中使用黄金矩形．大概古希腊的几何学家在研究比例和几何平均值的时候就发现怎样去构造一条线段自身的几何平均值．而这一发现可能导致了黄金矩形的构成，反之亦然． [266]

$\phi$ 的实际值为：

$$\phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = 1.618\cdots$$

当它出现在以下事物上时或许我们能够辨认出它：

A B C D E

**分一线段为黄金比：**

1）画任意线段 $AC$，并作为一个单位．

2）作线段 $CD$ 垂直 $AC$，并取 $CD$ 为 $AC$ 的一半．

3）连线段 $AD$．

4）以 $D$ 为圆心，以 $|CD|$ 为半径画弧，交 $AD$ 于 $E$ 点．

5）以 $A$ 为圆心线段 $AE$ 的长为半径画弧交 $AC$ 于 $B$ 点．则 $B$ 点分 $AC$ 为黄金比，使得：

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \phi = 1.618\cdots$$

- 等角螺线
- 五边形
- 黄金矩形
- 黄金三角形
- 艺术
- 建筑学
- 代数
- 无穷数列
- 柏拉图体
- 圆内接正十边形
- 斐波那契数列相继项的比所构成的序列的极限
- 或其他你可能钻研的东西

[267]

## 园子里的数学

"早上好!"园丁喊道,似乎她是在迎接日出和她的植物.但她对正在叶子或土壤里悄悄发生着的奇怪的东西却知之不多.在植物根部的深处是分形和网络,而在大波斯菊、鸢尾属植物、金盏草和雏菊上斐波那契数正凝视着她.

她照常做着每天照看园子所应做的事.在每个地方都有一些不寻常的东西出现,但她没有注意,只有当自然呈现明显的变异时,她才感到迷惑.

首先她去清理她的羊齿植物.去掉死的复叶,并使像小提琴那样的头部暴露出来.她不知道此时等角螺线正在迎接她,也不知道羊齿叶的构造类似于分形.突然,她闻到了忍冬那沁人的芳香,于是她改变计划决定过去看看,在那里她看到忍冬爬上了篱笆与豌豆绞缠在一起.她决定对此作适当的修剪,但她并没有意识到她在工作中所面对的是螺旋,忍冬的左手系螺旋绞缠着豌豆的右手系螺旋.她小心翼翼,因为她担心会损伤新种植的豌豆.

接着她去除棕榈树下的杂草(她也在园子里种些像棕榈这样的东西).棕榈的枝在微风中晃动,而她没有想到渐开线正投入她的怀抱!

她沾沾自喜地看了一遍她的玉米."嗨!"她想着,她曾经对种植玉米犹豫过,但现在玉米幼苗长得这么好,使她受到了鼓舞.但对于玉米棒中的玉米粒所形成的三接点,她肯定是一无所知.

[268] 整个园子多好啊!生机勃勃,欣欣向荣!枫树上的新叶真值得赞美,她知道枫叶有着天生惹人喜爱的形状——自然界会把这类轴对称做得非常好.但她不可能知道,自然的叶序的仅有表记是植物枝干上叶子萌生的情况,它可以锻炼人们的眼睛.

环顾四周后她把目光集中在胡萝卜的地块上.她为此感到



自豪，它们长得多好啊！可是它们必须长细些以保证所有的胡萝卜都具有一样的大小．她显然并不指望用胡萝卜来镶嵌空间．

她没有意识到园子里四处充满着等角螺线，它们存在于雏菊和各种花的种子盘上．许多东西生长时形成螺线，因为当它尺寸增大时只有这种方式才能保持它的形状．

天气渐渐暖和了，平均日照时间也长了，最后她决定继续种植一些观赏的花、蔬菜和其他精心选择的植物．但更多的东西她忽略了，那就是充斥于园中的球、锥、多面体以及其他几何形状，而她却不认识它们．

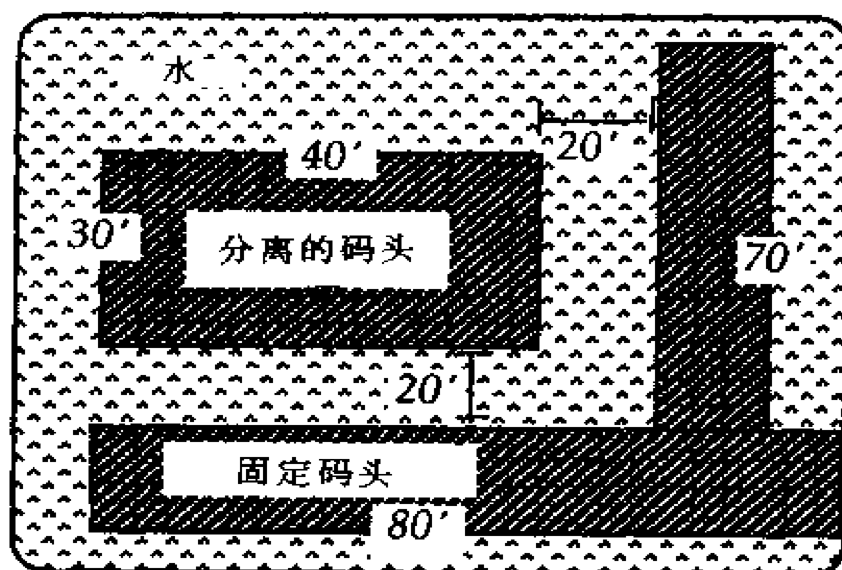
正像自然在园子里所显示的种种奇异的东西一样，大多数人并不留心其中所包含的大量计算和数学工作，因为它已成为自然界中十分正常的事情．自然界很好地知道它要怎样在限定的物质和形状下工作，以产生一种最为和谐的形式．于是在春天的日子里，园丁来到了她所照看的园子，展现在她眼前的是一片光明．接着她开始寻找每天所带来的新生长物和新的花果．然而她却不晓得，数学之花此刻正在她的园子里绽开着！

## 智 力 谜 题

**码头和跳板问题：**

一个分离的渔场码头(它与固定码头间的桥毁坏了)离开主码头20英尺.两个码头一样高.一些急切的渔民很想在分离的码头上试试运气.他们有两根跳板,每根19.5英尺长1英尺宽,而且不能把它们钉在一起.一个聪明人找到了一种方法,巧妙地利用这些跳板来过渡.

试问,怎样利用这些跳板以抵达分离的码头?



**逻辑测验题：**

玛莎、比尔和特雷每人都有两个不同的职业，他们彼此间职业也各不相同．这些职业是：作家、建筑师、教师、医生、律师和艺术家．在以下的各条陈述中每个特征都是指特定的人．

1）教师和作家跟玛莎去滑雪．

2）医生委托艺术家画一幅壁画．

3）医生跟教师一起开会．

4）艺术家是建筑师的亲戚．

5）特雷下棋胜了比尔和艺术家．

6）比尔住在作家的下一道门里．

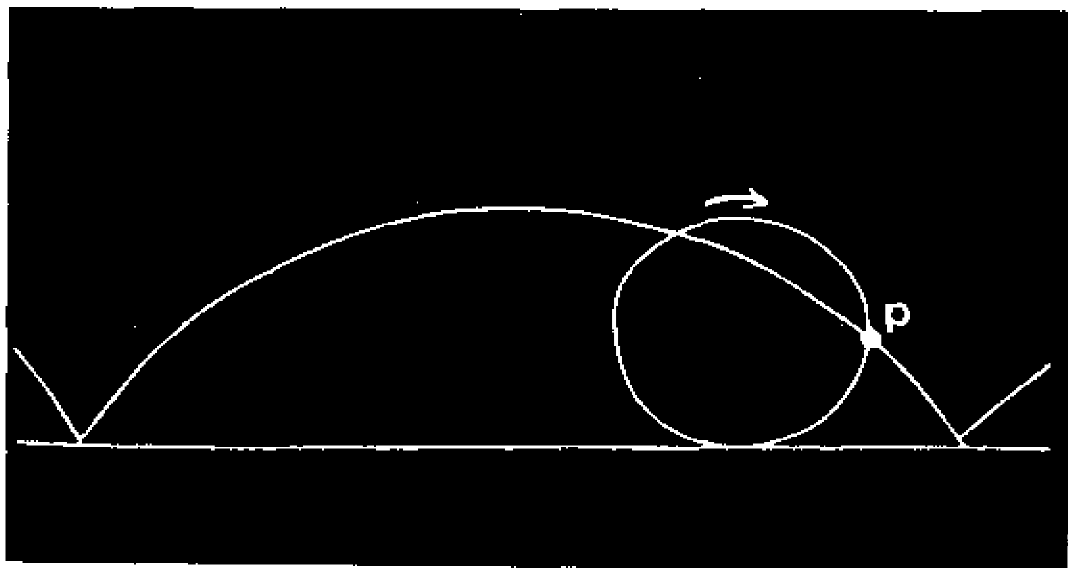
试找出每个人的职业是什么？

（解答见附录）

[270]

## 伽利略实验的收获——摆线的发现

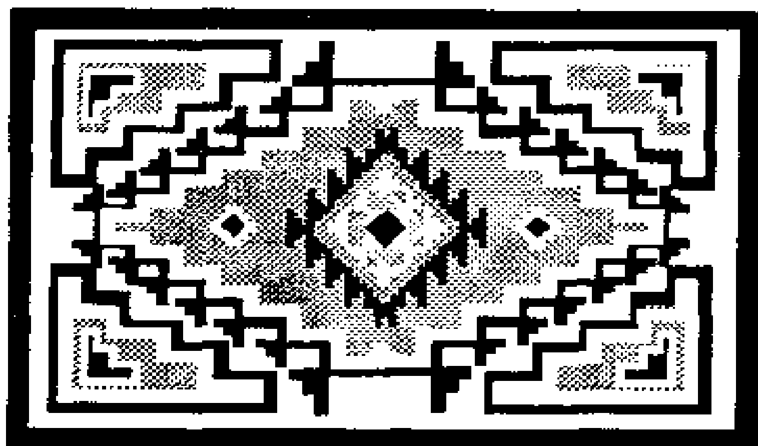
17 世纪是机械和运动的数学具有影响力的时代.也是摆线的时代.当一个圆在一条直线上平稳地滚动时,圆上一个固定点所描出的曲线即为摆线.伽利略(Galileo,1564—1642)是一位对摆线感兴趣的杰出人物.他发现了(但没有证明)有关摆线的两个重要事实.他发现一个摆线弧




的长度是旋转圆直径的 4 倍.他是通过用绳子度量并与旋转圆的直径比较后发现这一事实的.在研究摆线弧下方所围的面积时,他用一块薄板切下摆线所围的图形并称下重量,然后与同样薄板的旋转圆重量相比较,得出前者的面积是后者面积的 3 倍.他的实验被证明是精确的.遗憾的是,那时的数学还不能提供对这些发现的证明.[271]

# 数学与图案

无论美国本地的地毯，还是日本的纹章徽饰，或是史前的石雕陶器，穆斯林的建筑，乃至于计算机绘图作品，那迷津般的图案都是数学思想的财富．在某些情况下艺术家并不知道隐于他们图案后面的数学；但在另一些情况下，艺术家则是依靠数学来创造它们．不过，人们留意的并不是数学概念的出现，而是对发现、探索以及对图案的鉴定感兴趣．



例如，左图的地毯是美国本地的一种时髦的作品，作品中的图案具有：

——轴对称和反射．

有两条贯穿中间的水平和垂直的轴线把图案分为相等的两部分，当沿着该对称的轴线反射时，一边会与另一边完全相合．

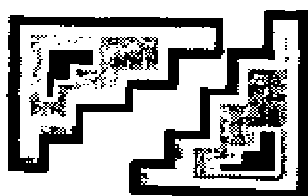


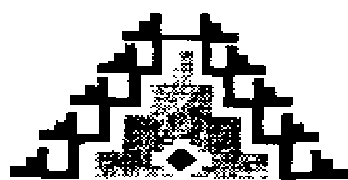
——全等．

到处都可以见到全等的形状．

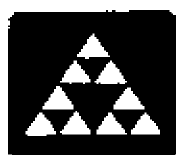
——相似和比例．

同样的形状但大小不同的几何物体穿插于图案之中，使图案看起来显得更加均衡．



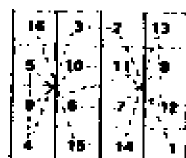


在11世纪,日本家庭的纹章徽饰成为一种习俗.许多传统性的徽饰是采用植物、动物、贵重物品、数学的对象与概念等作为特征.其中包含的数学主题就有：对称、结、三角形、正方形、圆、立方体、立体、六边形等等.它们全都用特定的方式描画,使得看起来具有大胆、无畏及富有生气的效果.





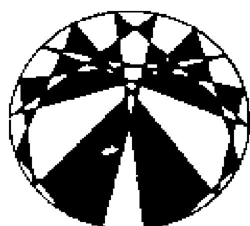

按照穆斯林的教义,艺术家如果在他们的作品中有类似生命的东西出现,便是侵犯了阿拉的领地,是不允许的.结果他们用数学概念来扩展他们的艺术形式,使镶嵌、旋转、变形、变换等跟对称与全等一样,充满于艺术作品中.在更近的年代,M·C·埃舍尔进一步掌握镶嵌的理论,并将这些概念改变为现代的栩栩如生的形式.





超立方体和其他四维的图象在建筑师C·布拉顿(约1913年)的作品中得到了升华.他所设计的罗契斯特(美国纽约州西部的一工业城市——译者)商会建筑就是一例.另外,他还将“幻直线”用于建筑装饰和图案绘制中.幻直线是由幻方所形成的,当幻方中的数按顺序连接起来,所得出的便是如同右上图的幻直线图案.

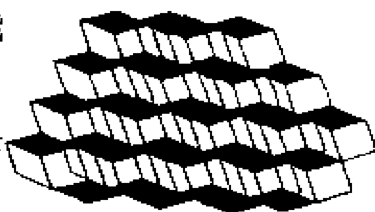
[273]



——模算术.

用它可以产生一些生动而显目的图案.左图便是其中的一种.

——视幻觉和不可能的图形.



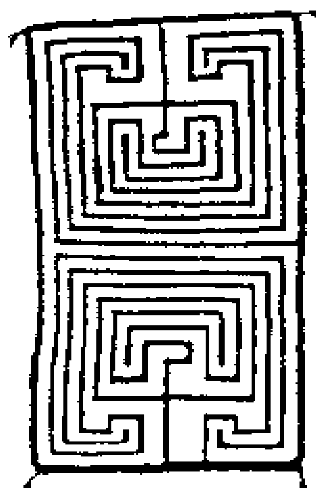
它们被用于许多绘画作品中.右图是一个逗人喜爱的视幻觉图案.

——迷宫、若旦曲线和结.

它们被用于作为古代硬币的图案(由克利索斯、克利特岛等地出土),拿佛约地毯上迷宫以及爱尔兰石雕等方面的图案.


克利索斯出土的硬币图案


爱尔兰石雕


拿佛约地毯上的迷宫图案

——黄金矩形、黄金比值、等角螺线.

上述数学概念出现在诸如五角星形和各种不同的编织物图案中.



——波形饰.

出现在陶器上,它提供了极好的全等、反射和迷宫的例子.

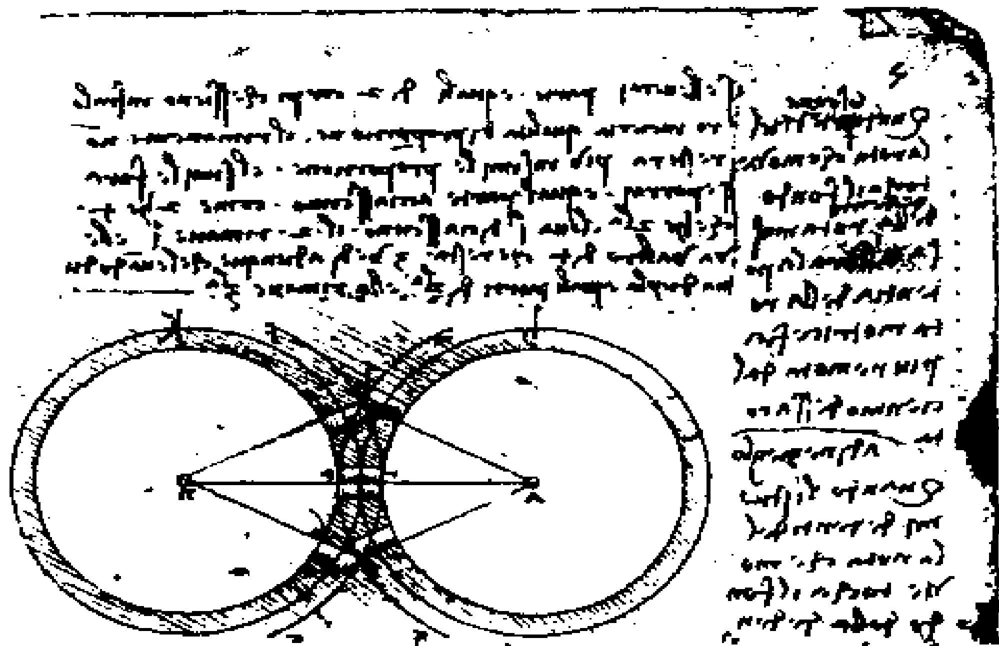
近代,用计算机和数学分形的概念产生出一些像树状分形、龙形曲线、雪花曲线等令人兴奋的图案.

许多艺术家依托于他们所了解的数学概念来创造一些特定的图案.这些艺术家中包含有:菲狄亚斯(公元前5世纪希腊的雕刻家——译者)、达·芬奇、A·丢勒、G·塞拉(19世纪法国画家——译者)、M·C·埃舍尔、P·曼诸利安(20世纪荷兰画家——译者)等.数学的图案和对象,为设计和创造提供了丰富的"食粮".绘画艺术家们用数学的概念武装自己,使自己的绘画有一个坚实的基础,从而大大增进了自身的创造力.

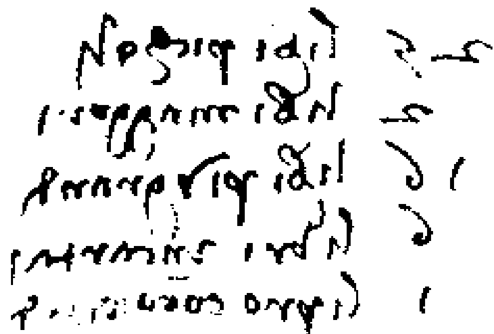
[274]

## 达·芬奇的笔迹

达·芬奇是一位具有多方面兴趣和好奇心的天才.他的作品、手稿和几卷笔记,显示了他作为一名画家、雕刻家、建筑师、数学家、科学家、工程师和音乐家的才华.达·芬奇用左手写字作



画.他的签名以及它在笔记本上的记载都是从右到左的,并且类似于镜像的书法.当他进行创作时,他经常缩短或遗漏了词或短语,以使书写能赶上他的思想.偶然一两下由于写信或其他有目的需要,他才从左向右书写,但这时反而显得有点笨拙,笔迹也不甚流利.



上面的数显示了达·芬奇的镜像书法.

[275]

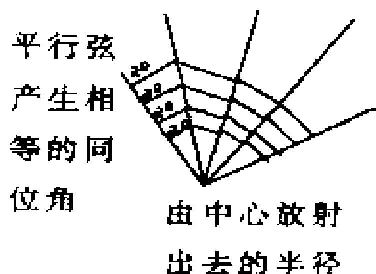
达·芬奇逝世后,他遗留物中的手稿留给了他的学生和门徒 F·米罗兹.米罗兹视此为珍宝而且不辞劳苦地加以编目出版.但米罗兹死后,许多未出版的达·芬奇笔记和作品因被盗卖而散失.

# 数学与蜘蛛网

蛛网是一种简单而优美的自然造物.那结满露珠的网在晨曦的照射下散射着光辉,沁人心脾,令人陶醉！然而,当人们试图用数学去描述那美丽的结构时,其所需要的公式之复杂是令人惊异的.

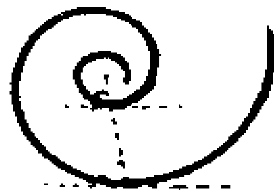
有许许多多蛛网的图案,它们由各种不同的蜘蛛织成,有片状的,三角形状的,漏斗状的或圆顶状的.让我们看一看球蜘蛛的网所揭示的数学概念吧！人们很难猜到它联系着怎样一种建筑工作.

在蛛网中人们首先注意到的数学对象大概是两条类似于螺线的蛛网曲线.我们把从蛛网中心放射出去的那几股线称为"半径".类似螺线的曲线则由连接两相邻半径的弦形成.位于两条相邻半径间的弦互相平行,沿半径的所有同位角也全都相等.假如蜘蛛网的半径有无穷多条,那么整段蛛网将具有单一的形式,这时替代锯齿般螺形线的是一条平滑的曲线.这种曲线就是对数螺线.




**对数螺线的性质.**

● 在螺线与半径的交点处画切线,则切线与半径所形成的角全都相等.这就是为什么对数螺线也称等角螺线的原因.



● 螺线截半径所得的各线段长,依次成等比数列.螺线按几何比率增大,其对数螺线的名称即由此而来.

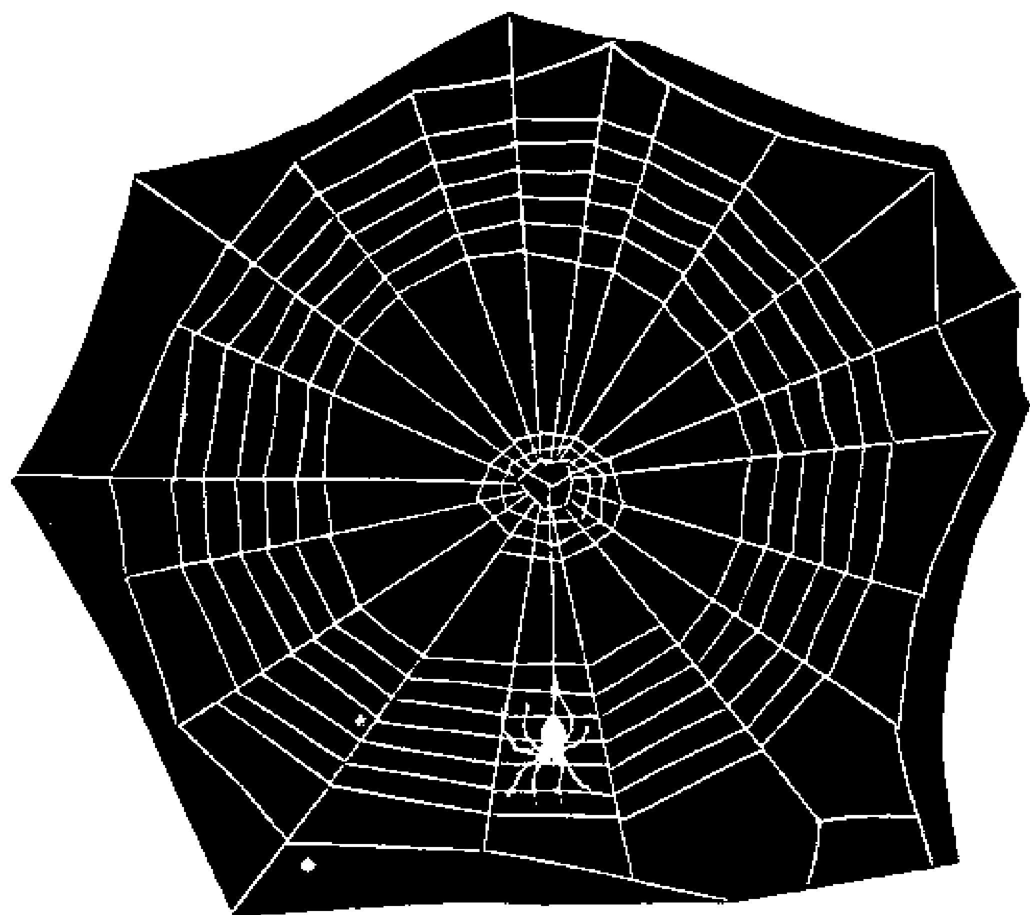
● 当蛛网缠绕将近完结时,它的尺寸会发生变化,但这不是对数螺线的形状.

● 如果一条螺线形式的线,从它位于中心处的端点逐渐

[276]

解开，同时永远使线保持一种绷紧的状态，那线的端头在解开时将形成一条对数螺线.

● 类似于螺线的蛛网，既经济又规则地充满了空间，它不仅强韧而且花用的材料最少.



**蜘蛛怎样构造它的网：**

蜘蛛最初为它的网设置一个三角形的框架.这对于产生最大的强度和韧性极为必要，而且所用的丝也可以减少到最低限度.第二条螺线是蜘蛛结网时作为陷阱的主要部分，它是用很粘的丝从外部向中心部分兜转而成的.蜘蛛所织的两种网都是对

数螺线.[1] [277]

当早晨的露凝布在蜘蛛网上时,互相靠拢的水结成小小的水滴(特别对于较粘的丝).蛛网的弦由于水滴的负荷而弯曲,使得每条弦都变成为悬链线!

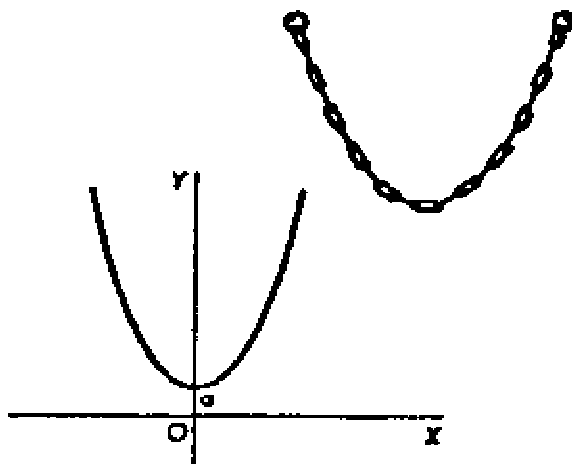
悬链线是由一条自由悬挂着的柔软的绳子或链条所形成的曲线.它的一般性方程为:

$$Y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

这里 $a$ 是 $Y$ 轴上的截距.

出现在悬链线方程中的 $e$ 为:

$$\begin{aligned}e&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\\&=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\\&=2.7182818,\end{aligned}$$



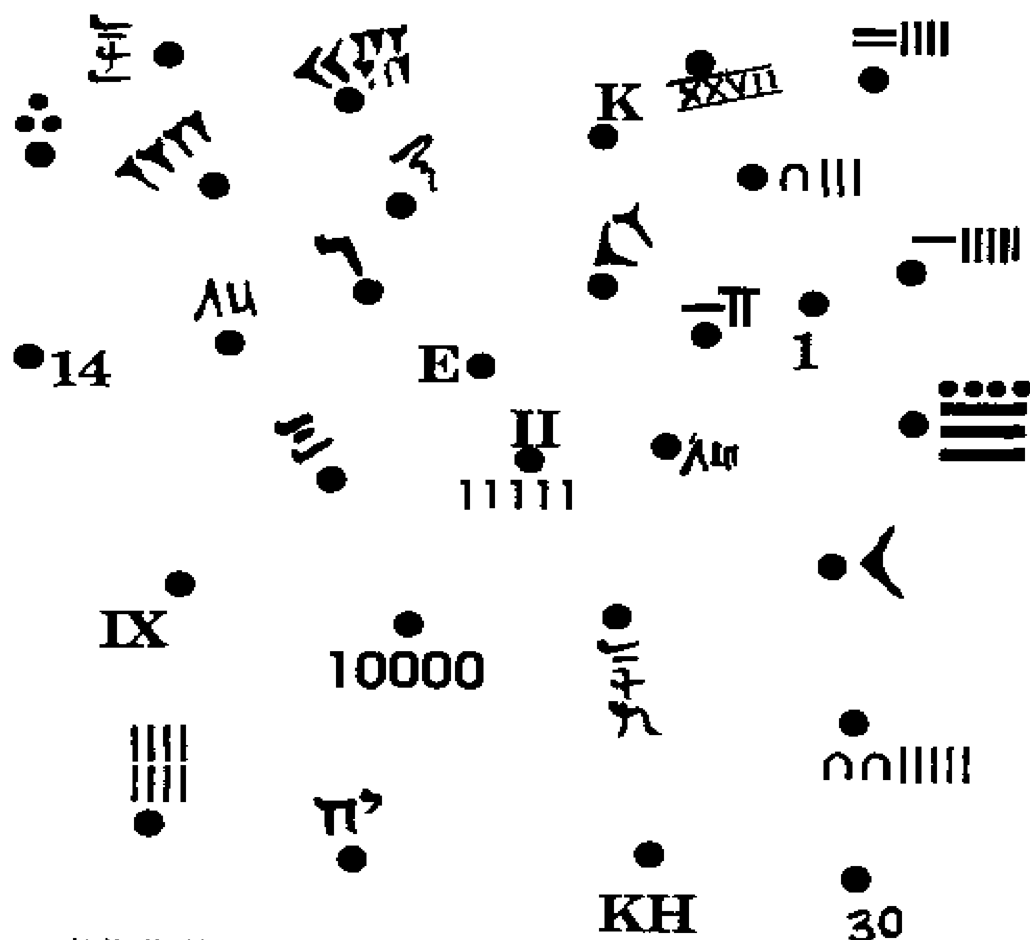

它是一个无理数和超越数,也算是一件被蜘蛛网"捕捉"的"猎物".还有许多其他的数学概念,如半径、弦、平行线段、三角形、相等的同位角、对数螺线、悬链线等,也和 $e$ 一样都"落入"了蜘蛛所编织的陷阱. [278]

---

① 原注:蜘蛛开始织网时利用不同的腺体来产生丝,一些腺体产生出很粘的丝,而另一些腺体产生不粘的丝.框架、半径和第一条螺线(临时性的)是用不粘的丝,这样蜘蛛不至于自己抓住自己,蜘蛛则记住了网的各种情况.这样,当一个猎物被网粘住时,便能立即判断该猎物的大小和所在的位置(根据猎物挣扎时拖曳半径引起振动的感觉),然后很快地经由不粘的丝爬到猎物的旁边,并最终抓住它的猎物.

## 一个令人困惑的连接打点号之谜

下面是一张令人困惑的连接打点号的谜.对象是连续的自然数,但用不同的数字系统写成.揭示这些隐藏的数字可以测试你对不同数字系统的知识.如果你需要温习一下你的本事的话,那么可以告诉你,这些数字是用以下的系统描述的:玛雅的、罗马的、中国书写体、中国条形数字、巴比伦的、埃及象形文字、埃及僧侣用的、二进位制、希腊的、15世纪的希伯莱数和印度——阿拉伯数字等.




当你依数的大小顺序连接这些打点号时,你就将洞悉那令人困惑之谜的谜底.

(解答见附录)

附录：

# 解答·答案·说明

● 第 15 页——蠹鱼谜题：

答案为 10.5. 如果你了解问题，就知道蠹鱼吃了第 1 卷的前封皮和第 6 卷后封皮以及第 2,3,4,5 卷的全部.

竹　　堆：一种解答是：另一种解答由 L·比义提出：



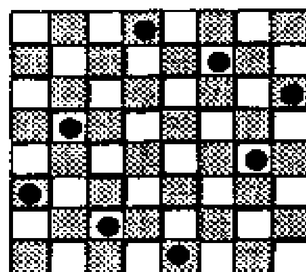


金银币谜题：一种解答是：6→3,1→6,5→1,2→5,3→2. 移 5 次.

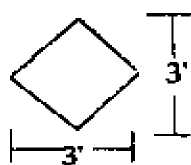
● 第 31 页——单人棋谜题：

最少移动数为 15. 你能有更好的吗？

● 第 74 页——八个棋子谜题：



● 第 81 页——卡洛尔窗子谜题：



● 第 120 页——天平谜题：

天平谜题的一种解法是用代数方程组. 设 $b$ = 一个瓶子重量，$g$ = 一个玻璃杯重量，$p$ = 水罐的重量，$s$ = 一个盘子的重量. 每次称量都可以用方程表示：

(1) $b+g=p$；(2) $b=g+s$；(3) $2p=3s$.

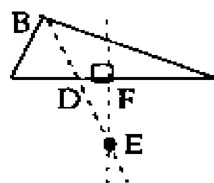
我们想找出 $b=?\ g$. 将方程(3)变形为 $\frac{2}{3}p=s$. 将 $\frac{2}{3}p$ 代入方程(2)我们得到：

(4) $b=g+\frac{2}{3}p$.

化简这个方程可得 $b=5g$. 因此 5 个玻璃杯与一个瓶子平衡.

● 第 128 页——作矩形：20 个.

● 第 132 页——每个三角形都等腰吗？

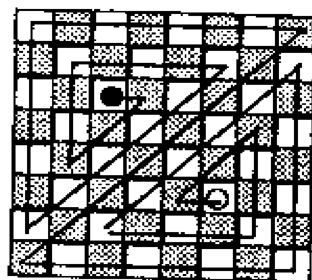



$\triangle ABC$ 并非"每一个三角形". 图中的第 3 步作了一个错误的假定，即假定对任意的三角形射线 $BD$ 与直线 $EF$ 交于三角形内部. 一般情况并非这样. 例如右图.

● 第 153 页——测量问题：

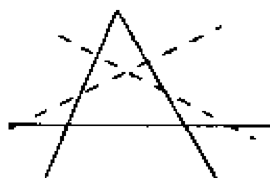
为了测量从 1 到 40 单位的整长度，你可以用四种长度的尺. 分别为：1，3，9 和 27.

● 第 157 页——罗密欧与朱利叶谜题：

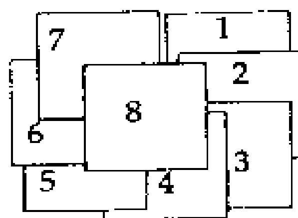


罗密欧到达朱利叶最少要转弯 15 次，包括开始的第一次转弯. 其路线如右图.

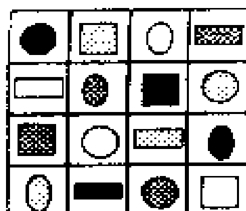
● 第 177 页——产生三角形谜题：



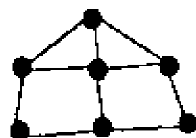
● 第 199 页——重叠正方形问题:




● 第 217 页——形状与颜色谜题:



● 第 220 页——船坞问题:



它是不可能的.因为它的网络(右图)有 4 个奇顶点.

[280]

● 第 222 页——水壶问题:

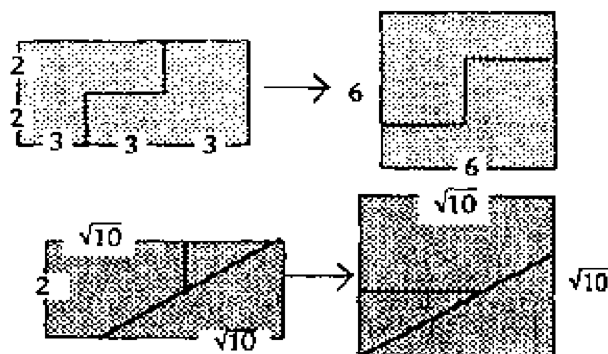
首先倒满 8 升壶,并从 8 升壶倒满 5 升壶,又从 5 升壶倒满 3 升壶.然后将 3 升壶里的酒倒回到 8 升壶去,再将 5 升壶中剩下的酒倒到 3 升壶中去.现在大壶里有 6 升酒,3 升壶里有 2 升酒,而 5 升壶空着.接着再从 8 升壶倒满 5 升壶,从 5 升壶倒满 3 升壶.现在 5 升壶中留有 4 升,再将 3 升壶倒回到 8 升壶,8 升壶原来剩 1 升,现在就有了 4 升.这样 8 升酒便分为 4 升、4 升两部分.

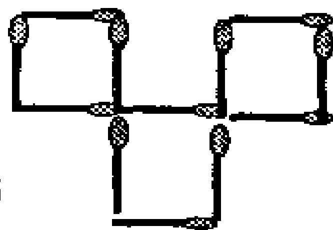
● 第 233 页——环绕地球:

假如地球赤道周长为 25000 英里,这相当于 132000000 英尺.加上一码则绳长为 132000003 英尺,应用圆周长公式 $c=\pi r$,得出地球半径 $r=21008452.49$ 英尺.而环绕地球的绳圈半径约 21008452.97 英尺.它们相差 0.48 英尺,相当于 5.76 英寸.

● 第 240 页——智力练习题:

剖分谜题:



火柴杆谜题：（右图）

立方体谜题：

$\angle ABC = 60°$.

在图中连 $AC$，则 $\triangle ABC$ 为等边三角形，因为它的三边都是立方体面的对角线，因而全等.

● **第 245 页**——洛依德丢失数字的谜题：

```
          8 5 3
749 ) 6 3 8 8 9 7
      5 9 9 2
        3 9 6 9
        3 7 4 5
          2 2 4 7
          2 2 4 7
```

● **第 254 页**——7，11 及 13 等数的奇异特性：

当$\overline{abcabc}$写为位置值的形式，我们得到

$100000a + 10000b + 1000c + 100a + 10b + c$

$= 100100a + 10010b + 1001c$.

由于 $7 \times 11 \times 13 = 1001$，它是 100100，10010 及 1001 的因子，因而它总能除尽$\overline{abcabc}$，任何 7，11，13 积的组合，如 77，91，

143,1001 等都是$\overline{abcabc}$的因子.

● 第 260 页——不同计量单位老的说法:

得寸进尺(给他一英寸而他却想要一英里).

割肉还债(他要他的一磅肉).

差一英寸和差一英里一样是错.

完美的图形(整整 36 英寸).

各自为政(每英寸一个国王).

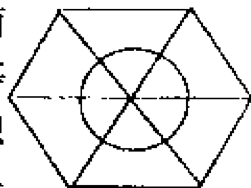
光彩照人(五英尺二,蓝眼睛……).

海枯石烂不变心(我爱你一蒲式尔又一配克).

预防胜于良药(一盎司的预防顶得上一磅的药).

将近结束(先下来再走 10 码).(棒球语——译者)

● 第 268 页——用绳拴羊的谜题:



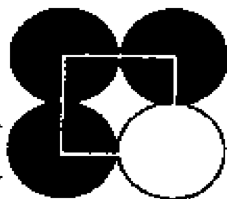
由 6 个全等的等边三角形构成的六角形面积为 12$\pi$ 英亩.羊吃掉草的部分为 $\pi$ 英亩(即等边三角形所围面积的一半).于是图中圆的面积为六角形面积的一半,即 6$\pi$ 英亩或 261360$\pi$ 平方英尺.圆的半径即拴羊的绳子长.于是:$261360\pi = \pi r^2$,$r =$ 511 英尺.



● 第 303 页——哪一枚硬币是假的?

最少的称量数为 3.分硬币为 3 组,每组 9 枚.第一次称量可以确定假币是在哪一组.然后将这组硬币又分为 3 部分,每部分 3 枚.由第二次称量可以确定假币是在哪 3 枚中.最后再由第三次称量确定哪枚硬币是假的.

● 第 310 页——水壶形谜题:



水壶形面积为 1 平方英尺.

在正方形中有 4 个四分之一圆,它们组成一个整圆,水壶形状由一个圆及正方形中不被四个

四分之一圆覆盖的部分组成.因此它的面积……正方形面积

尺.

● 第 322 页——智力谜题:

码头和跳板问题:(如右图)

逻辑测验题:

第 5 条陈述告诉我们玛莎是艺术家.

用第 1,4,2 条陈述我们能够确定玛莎不是一位教师、建筑师、作家和医生,这样,她还应当是律师.

第 6 条陈述告诉我们,比尔不是作家,于是他的职业只能是教师、建筑师和医生,从陈述 3 推出,医生和教师是不同的两个人.这意味着比尔必须是建筑师.又比尔不能是医生,否则教师同时又是作家,这跟陈述 1 相违背.从第 6 条知比尔不是作家,这样比尔的另一个职业必为教师,而特雷则是医生和作家.综上:

玛莎——艺术家和律师.

比尔——建筑师和教师.

特雷——医生和作家.

● 第 332 页——一个令人困惑的连接打点号之谜:

一个五角星形成了!

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 = | I | 印度—阿拉伯 | 13 = | ∩III | 埃及象形文字 |
| 2 = | II | 罗马的 | 14 = | 14 | 印度—阿拉伯 |
| 3 = | 三 | 中国书写体 | 15 = | 一IIIII | 中国条形数字 |
| 4 = | TTTT | 巴比伦的 | 16 = | 10000 | 二进位制 |
| 5 = | E | 希腊的 | 17 = | 一T | 中国条形数字 |
| 6 = | ו | 希伯来的 | 18 = | יח | 希伯莱的 |
| 7 = | ጘ | 埃及僧侣的 | 19 = | ≡ | 玛雅的 |
| 8 = | IIII IIII | 埃及象形文字 | 20 = | K | 希腊的 |
| 9 = | IX | 罗马的 | 21 = | 二十一 | 中国书写体 |
| 10 = | < | 巴比伦的 | 22 = | ≡.. | 玛雅的 |
| 11 = | <T | 巴比伦的 | 23 = | ⋀ɥ | 埃及僧侣 |
| 12 = | ∧ɥ | 埃及僧侣的 | 24 = | =IIII | 中国条形数字 |

25 = ∩∩IIIII 埃及象形文字　　29 = 二十九 中国书写体

26 = 𒌋𒌋𒐋 巴比伦的　　30 = 3o 印度—阿拉伯

27 = XXVII 罗马的　　31 = 11111 二进位制

28 = KH 希腊的

〔282〕

# 参考文献


Alic ,Margaret. HYPATIA HERITAGE, Beacon Press, Boston, 1986.

Asimov, Isaac. ASIMOV ON NUMBERS, 295*, Pocket Books, New York, 1978.

Bakst, Aaron. MATHEMATICS ITS MAGIC & MASTERY, D. Van Nostrand Co., New York, 1952.

Ball W. W. Rouse and Coxeter, H. S. M. MATHEMATICAL RECREATIONS & ESSAYS, 13th ed., Dover Publications, Inc., New York, 1973.

Ball, W. W. Rouse. A SHORT ACCOUNT OF THE HISTORY OF MATHEMATICS, Dover Publications, Inc., New York, 1960.

Banchoff, Thomas F. BEYOND THE THIRD DIMENSION, Scientific American Library, New York, 1990.

Barnsley, Michael. FRACTALS EVERYWHERE, Academic Press, Inc., Boston, 1988.

Beckman, Petr. A HISTORY OF $\pi$, St. Martin's Press, New York, 1971.

Beiler, Albert H. RECREATIONS IN THE THEORY OF NUMBERS, Dover Publications, Inc., New York, 1964.

Bell, E. T. MATHEMATICS QUEEN & SERVANT OF SCIENCE, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1951.

Bell, E. T. MEN OF MATHEMATICS, Simon & Schuster, New York, 1965.

Bell, R. C. BOARD AND TABLE GAMES FROM MANY CIVILIZATIONS, Dover Publications, Inc., New York, 1979.

Bell, R. C. OLD BOARD GAMES, Shire Publications Ltd., Bucks, U.K., 1980.

Benjamin Bold. FAMOUS PROBLEMS OF GEOMETRY & HOW TO SOLVE THEM, Dover, Publications, Inc, New York, 1969.

Bergamini, David. MATHEMATICS, Time Inc., New York, 1963.

Boyer, Carl B. A HISTORY OF MATHEMATICS, Princeton University Press,

Princeton, 1985.

Brooke, Maxey. COIN GAMES & PUZZLES, Dover Publications, Inc., New York, 1963.

Bunch, Bryan H. MATHEMATICAL FALLACIES & PARADOXES, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1982.

Campbell, Douglas and Higgins, John C. MATHEMATICS-PEOPLE, PROBLEMS, RESULTS, 3 volumes Wadsworth International, Belmont 1984.

Chadwick, John. READING THE PAST-LINEAR B AND RELATED SCRIPTS, University of California Press, Berkeley, 1987.

Clark, Frank. CONTEMPORARY MATH, Franklin Watts, Inc., New York, 1964.

Cook, Theodore Andrea. THE CURVES OF LIFE, Dover Publications, Inc., New York, 1979.

Davis, Philip J. and Hersh, Reuben. THE MATHEMATICAL EXPERIENCE, Houghton Mifflin Co., Boston, 1981.

Delft, Pieter van and Botermans, Jack. CREATIVE PUZZLES OF THE WORLD, Harry N. Abrams, Inc., New York, 1978.

Doczi, György. THE POWER OF LIMITS, Shambhala Publications, Boulder, CO, 1981.

Edwards, Edward B. PATTERN AND DESIGN WITH DYNAMIC SYMMETRY, Dover Publications, Inc., New York, 1967.

Ellis, Keith. NUMBER POWER, St. Martin's Press, New York, 1978.

Emmet, E. R. PUZZLES FOR PLEASURE, Bell Publishing Co., New York, 1972.

Engel, Peter. FOLDING THE UNIVERSE, Vintage Books, New York, 1989.

Ernst, Bruno. THE MAGIC MIRROR OF M. C. ESCHER, Ballantine Books, New York, 1976.

Eves, Howard W. IN MATHEMATICAL CIRCLES, two volumes, Prindle, Weber & Schmidt, Inc., Boston, 1969.

Filipiak, Anthony S. MATHEMATICAL PUZZLES, Bell Publishing co., New York, 1978.

Fixx, James. GAMES FOR THE SUPER INTELLIGENT, Doubleday & Co., Inc., New York, 1972.

Fixx, James. MORE GAMES FOR THE SUPER-INTELLIGENT, Doubleday &

Co.,Inc.,New York,1972.

Gamow,George.ONE,TWO,THREE...INFINITY,Viking Press,New York,1947.

Gardner. Martin. PERPLEXING PUZZLES & TANTALIZING TEASERS, Dover Publications,Inc.,New York,1977.

Gardner. Martin. THE UNEXPECTED HANGING. Simon & Schuster, Inc., New York,1969.

Gardner. Martin. CODES, CIPHERS & SECRET WRITING, Dover Publications, Inc.,New York,1972.

Gardner,Martin. MATHEMATICS MAGIC & MYSTERY, Dover Publications,Inc., New York,1956.

Gardner. Martin. NEW MATHEMATICAL DIVERSIONS FROM SCIENTIFIC AMERICAN,Simon & Schuster,New York,1966.

Gardner,Martin.MATHEMATICAL CARNIVAL,Alfred A.Knopf,New York,1975.

Gardner, Martin. MATHEMATICAL MAGIC SHOW. Alfred A. Knopf, New York, 1977.

Gardner,Martin.MATHEMATICAL CIRCUS,Alfred A.Knopf,New York,1979.

Gardner.Martin.MARTIN GARDNER'S SIXTH BOOK OF MATHEMATICAL DIVERSIONS FROM SCIENTIFIC AMERICAN.University of Chicago Press, Chicago,1983.

Gardner,Martin. THE NEW AMBIDEXTROUS UNIVERSE, W. H. Freeman, New York,1990.

Gardner,Martin.PENROSE TILES TO TRAPDOOR CIPHERS,W.H.Freeman & Co.,New York,1988.

Gardner,Martin.KNOTTED DOUGHNUTS & OTHER MATHEMATICAL ENTERTAINMENTS,W.H.Freeman & Co.,New York,1986.

Gardner,Martin.TIME TRAVEL,W.H.Freeman & Co.,New York,1987.

Gardner,Martin.WHEELS,LIFE AND OTHER MATHEMATICAL AMUSEMENTS, W.H.Freeman & Co.,New York,1983.

Gardner,Martin. THE INCREDIBLE DR. MATRIX, Charles Scribner's Sons, New York,1976.

Gardner,Martin.THE 2ND SCIENTIFIC AMERICAN BOOK OF MATHEMATICAL PUZZLES & DIVERSIONS,Simon & Schuster,New York,1961.

Gardner, Martin. THE SCIENTIFIC AMERICAN BOOK OF MATHEMATICAL PUZZLES & DIVERSIONS, Simon & Schuster, New York, 1959.

Ghyka, Matila. THE GEOMETRY OF ART & LIFE, Dover Publications, Inc., New York, 1977.

Gleick, James. CHAOS, Penguin Books, New York, 1987.

Glenn, William H. and Johnson, Donovan A. INVITATION TO MATHEMATICS, Doubleday & Co., Inc., Garden City, 1961.

Glenn, William H. and Johnson, Donovan A. EXPLORING MATHEMATICS ON YOUR OWN, Doubleday & Co., Inc., Garden City, 1949.

Golos, Ellery B. FOUNDATIONS OF EUCLIDEAN AND NON-EUCLIDEAN GEOMETRY, Holt, Rinehart and Winston Inc., New York, 1968.

Graham, L. A. INGENIOUS MATHEMATICAL PROBLEMS & METHODS, Dover Publications, Inc., New York, 1959.

Greenburg, Marvin Jay. EUCLIDEAN AND NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES, W. H. Freeman & Co., New York, 1973.

Grünbaum, Branko and Shephard, G. C. TILINGS AND PATTERNS, W. H. Freeman & Co., New York, 1987.

Gunfeld, Frederic V. GAMES OF THE WORLD, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1975.

Hambridge, Jay. THE ELEMENTS OF DYNAMIC SYMMETRY, Dover Publications, Inc., New York, 1953.

Hawkins, Gerald S. MINDSTEPS TO THE COSMOS, Harper & Row, Publishers, New York, 1983.

Heath, Royal Vale. MATH-E-MAGIC, Dover Publications, Inc., New York, 1953.

Herrick Richard, editor, THE LEWIS CARROLL BOOK, Tudor Publishing, Co., New York, 1944.

Hoffman, Paul. ARCHIMEDES REVENGE, W. W. Norton & Co., New York, 1988.

Hoggatt, Verner E., Jr. FIBONACCI & LUCAS NUMBERS, Houghton Mifflin Co. Boston, 1969.

Hollingdale, Stuart. MAKERS OF MATHEMATICS, Penguin Books, London, 1989.

Hunter, J. A. H. and Madachy, Joseph S. MATHEMATICAL DIVERSIONS, Dover Publications, Inc., NEW YORK, 1975.

Huntley, H. E. THE DIVINE PROPORTION, Dover Publications, Inc., New York, 1970.

Hyman, Anthony. CHARLES BABBAGE, Princeton University Press, Princeton, 1982.

Ifrah, George. FROM ONE TO ZERO, Viking Penguin Inc., New York, 1985.

Ivins, William M. ART & GEOMETRY Dover Publications, Inc., New York, 1946.

Jones, Madeline. THE MYSTERIOUS FLEXAGONS, Crown Publishers, Inc., New York, 1966.

Kaplan, Philip. POSERS, Harper & Row, New York, 1963.

Kaplan, Philip. MORE POSERS, Harper & Row, New York, 1964.

Kasner, Edward & Newman, James. MATHEMATICS AND THE IMAGINATION, Simon & Schuster, New York, 1940.

Kim, Scott. INVERSIONS, W. H. Freeman and Co., New York, 1981.

Kline, Morris. MATHEMATICS AND THE PHYSICAL WORLD, Thomas Y. Crowell Co., New York, 1959.

Kline, Morris. MATHEMATICS-THE LOSS OF CERTAINTY, Oxford University Press, New York, 1980.

Kline, Morris. MATHEMATICAL THOUGHT FROM ANCIENT TO MODERN TIMES, 3 volumes, Oxford University Press, New York, 1972.

Kraitchik, Maurice. MATHEMATICAL RECREATIONS, Dover Publications, Inc., New York, 1953.

Lamb, Sydney. MATHEMATICAL GAMES PUZZLES & FALLACIES, Raco Publishing Co., Inc., New York, 1977.

Lang, Robert. THE COMPLETE BOOK OF ORIGAMI, Dover Publications, Inc., New York, 1988.

Leapfrogs. CURVES, Leapfrogs, Cambridge, 1982.

Linn, Charles F., editor. THE AGES OF MATHEMATICS, 4 volumes, Doubleday & Co., New York, 1977.

Locker, J. L., editor. M. C. ESCHER, Harry N. Abrams, Inc., New York, 1982.

Loyd, Sam. THE EIGHTH BOOK OF TAN, Dover Publications, Inc., New York, 1968.

Loyd, Sam. CYCLOPEDIA OF PUZZLES, The Morningside Press, New York,

1914.

Luckiesh, M. VISUAL ILLUSIONS, Dover Publications, Inc., New York, 1965.

Madachy, Joseph S. MADACHY'S MATHEMATICAL RECREATIONS, Dover Publications, Inc., New York, 1979.

McLoughlin Bros. THE MAGIC MIRROR, Dover Publications, Inc., New York, 1979.

Menninger, K. W. MATHEMATICS IN YOUR WORLD, Viking Press, New York, 1962.

Montroll, John. ORIGAMI FOR THE ENTHUSIAST, Dover Publications, Inc., New York, 1979.

Moran, Jim. THE WONDEROUS WORLD OF MAGIC SQUARES, Vintage Books, New York, 1982.

Neugebauer, O. THE EXACT SCIENCES IN ANTIQUITY, Dover Publications, Inc., New York, 1969.

Newman, James. THE WORLD OF MATHEMATICS, 4 volumes, Simon & Schuster, New York, 1956.

Ogilvy, C. Stanley and Anderson, John T. EXCURSIONS IN NUMBER THEORY, Dover Publications, Inc., New York, 1966.

Ogilvy, Stanley C. and Anderson, John T. EXCURSIONS IN NUMBER THEORY, Oxford University Press, New York, 1966.

Osen, Lynn, M. WOMEN IN MATHEMATICS, The MIT Press, Cambridge, 1984.

Peat, F. David. SUPERSTRINGS AND THE SEARCH FOR THE THEORY OF EVERYTHING, Contemporary Books, Chicago, 1988.

Pedoe, Dan. GEOMETRY AND THE VISUAL ARTS, Dover Publications, Inc., New York, 1976.

Perl, Teri, MATH EQUALS Addison-Wesley Publishing Co., Menlo Park, 1978.

Peterson, Ivars. THE MATHEMATICAL TOURIST. W. H. Freeman & Co., New York, 1988.

Pickover, Clifford, A. COMPUTERS, PATTERN, CHAOS & BEAUTY, St. Martin's Press, New York, 1990.

Ransom, William R. FAMOUS GEOMETRIES, J. Weston Walch, Portland, 1959.

Ransom, William R. CAN & CAN'T IN GEOMETRY, J. Weston Walch, Portland,

1960.

Rodgers. James T. STORY OF MATHEMATICS FOR YOUNG PEOPLE. Pantheon Books, New York, 1966.

Rosenberg, Nancy. HOW TO ENJOY MATHEMATICS WITH YOUR CHILD, Stein & Day, New York, 1970.

Rucker, Rudolf V. B. GEOMETRY, RELATIVITY & THE FOURTH DIMENSION, Dover Publications Inc., New York, 1977.

Sackson, Sid. A GAMUT OF GAMES, Pantheon Books, New York, 1982.

Schattschneider, Doris and Walker, Wallace. M. C. ESCHER KALEIDOCYCLES, Tarquin Publications, Norfolk, U. K., 1978.

Science Universe Series, MEASURING & COMPUTING, Arco Publishing. Inc., New York, 1984.

Sharp, Richard and Piggott, John, editors. THE BOOK OF GAMES, Galahad Books, New York City, 1977.

Smith, David Eugene. HISTORY OF MATHEMATICS, 2 volumes, Dover Publications. Inc., New York, 1953.

Steen, Lynn A., editor. FOR ALL PRACTICAL PURPOSES, INTRO. TO CONTEMPORARY MATHEMATICS, W. H. Freeman & Co., New York, 1988.

Steen, Lynn Authur, ed. MATHEMATICS TODAY, Vintage Books, New York, 1980.

Stevens, Peter S., PATTERNS IN NATURE, Liitle, Brown and Co., Boston, 1974.

Stokes, William T. NOTABLE NUMBERS, Stokes Publishing, Los Altos, 1986.

Storme, Peter and Stryfe, Paul. HOW TO TORTURE YOUR FRIENDS, Simon & Schuster, New York, 1941.

Struik. Dirk J. A CONCISE HISTORY OF MATHEMATICS, Dover Publications, Inc., New York, 1967.

Waerden, B. L. van der. SCIENCE AWAKENING, Science Editions, New York, 1963.

Weyl, Hermann. SYMMETRY, Princeton University Press, Princeton, 1952.

# 索　引

（译名后的数码为原书页数；前面标有"△"的表明为本书上册的页数.）

D

# 关 于 作 者



数学教师和顾问 T·帕帕斯于 1966 年在伯克莱取得了加利福尼亚大学的文学士学位，而于 1976 年获斯坦福大学的文学硕士学位．她致力于使数学非神秘化，并帮助人们排除认为数学高不可攀而害怕与之接近的畏惧心理．

除了《数学趣闻集锦(上、下)》外，她还创作了《数学日历》、《儿童数学日历》、《数学 T 恤衫》、《数学知识日读》等通俗读物．此外，她还写有《你看到什么?》(这是一本介绍视幻觉的书)、《数学漫话》、《数学鉴赏》、《大数及其他数学故事》、《分形》、《数学魔术》等著作．